

Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発過程

京都大学理学研究科
物理学・宇宙物理学専攻 物理学第二分野
天体核研究室
村田佳樹

平成 19 年 1 月 31 日

概要

古典的にはブラックホールは内部から物質を放出することはできない。しかし、ブラックホール時空中の場の量子論を考えるとブラックホールは熱的な輻射 (Hawking 輻射) を出して蒸発していくことが分かる。ブラックホールの蒸発過程を理解することは、重力理論、量子論、または宇宙論的にも重要なことである。ブラックホールは Hawking 輻射により痩せていき、いずれ Planck 質量に達すると考えられる。Planck スケール以降の蒸発過程は Hawking 輻射の反作用や量子重力効果が効いてくるためほとんど何も分かっていない。しかし、4次元ブラックホールに関しては Planck スケールまでは準静的に痩せていくだけであろうと考えられている。

ところで、近年、超弦理論の登場により多くの高次元ブラックホールの研究が行われてきた。超弦理論では、我々の時空は4次元ではなく、より高次元であることを予言する。しかし、我々が観測するのは4次元時空である。残りの次元はどう考えれば良いだろうか。高次元時空を4次元時空に見えるようにするには、余分な次元を小さくコンパクト化してやればよい。通常このコンパクト化のスケールは Planck 長程度と考えられており、現在の実験のエネルギースケール ($\sim \text{TeV}$) では見ることはできないとする。このようなコンパクト化された時空のことを Kaluza-Klein 時空という。この Kaluza-Klein 時空でのブラックホールを考えてみよう。コンパクト化された空間で自然なブラックホールは余剰次元方向に巻きついた形をしていると考えられる。このようなブラックホールを Kaluza-Klein ブラックホールといい、この論文での主な研究対象である。この Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発過程はどうなるであろうか。それは Planck スケールに到達する以前の段階で4次元のものと大きく異なってくる可能性がある。その理由の一つとして、Kaluza-Klein ブラックホール特有の不安定性が挙げられる。ブラックホールホライズンがコンパクト化のスケールより小さい Kaluza-Klein ブラックホールは不安定であることが知られている (Gregory-Laflamme 不安定性)。そのため、Hawking 輻射でブラックホールが痩せていく段階で、ブラックホールが不安定化して、時空構造が大きく変化すると考えられる。二つ目の理由として、内部空間のダイナミクスが挙げられる。Hawking 輻射の反作用により、ブラックホールは痩せていくのであるが、同様に内部空間も Hawking 輻射の反作用を受けて変化していく。特にこの内部空間のダイナミクスは、これまでの研究では全く考えられてこなかった。

この修士論文での研究の目的は、Hawking 輻射による内部空間のダイナミクスを考慮に入れて Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発過程を明らかにすることである。実際の研究の結果、古典的には内部空間は安定であるにもかかわらず、Hawking 輻射の反作用により不安定化するということが分かった。我々はこの内部空間の不安定性を考慮し、Hawking 輻射の反作用により内部空間が潰れてしまうのではないかと予想している。この予想はこれまで考えられてきた Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発過程と全く異なるものである。この予想が正しいと仮定して、内部空間が潰れるまでのタイムスケールを見積もると、Gregory-Laflamme 不安定性の発生よりも先に内部空間が潰れる可能性があることが分かった。

目次

第1章	イントロダクション	4
第2章	ブラックホール熱力学	7
2.1	ブラックホールの熱力学量	7
2.1.1	ブラックホール質量	7
2.1.2	ブラックホールの角運動量	9
2.1.3	surface gravity	10
2.1.4	ホライズン角速度	13
2.1.5	ホライズン面積	13
2.2	ブラックホールにおける熱力学の法則	13
2.3	horizon constraint の方法	16
2.3.1	2次元 dilaton gravity	16
2.3.2	dilaton gravity の正準形式	17
2.3.3	horizon constraint とアノマリー	19
2.3.4	エントロピーの計算	21
2.3.5	解釈	22
第3章	Hawking 輻射	23
3.1	Hawking の方法	23
3.1.1	Schwarzschild ブラックホール	23
3.1.2	曲がった時空中のスカラー場の量子化	25
3.1.3	時間依存する時空中における粒子生成	28
3.1.4	重力崩壊する時空中における粒子生成	29
3.2	トレースアノマリーの方法	33
3.3	gravitational anomaly の方法	34
3.3.1	Hawking 輻射と gravitational anomaly	35
3.3.2	Kerr ブラックホールからの Hawking 輻射	38
3.3.3	Myers-Perry ブラックホールの場合	40
第4章	Hawking 輻射の反作用	43
4.1	4次元時空中における Hawking 輻射の反作用	43
4.2	CGHS モデル	44
4.3	RST モデル	48
4.4	horizon constraint の方法と RST モデル	52

第 5 章 Kaluza-Klein ブラックホールと不安定性	53
5.1 コンパクト化と有効作用	53
5.2 高次元時空におけるブラックホール	54
5.3 Kaluza-Klein ブラックホールの不安定性	55
5.3.1 熱力学的不安定性	55
5.3.2 Gregory-Laflamme instability	57
第 6 章 Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発過程	62
6.1 ナイーブな蒸発過程	62
6.2 高次元 Einstein-Hilbert 作用の dimensional reduction	64
6.3 3次元 dilaton gravity の観点	65
6.4 ブラックストリングの蒸発	67
6.5 radion の振舞い	70
6.6 弦モデル	71
6.7 ピンチするまでのタイムスケールの見積もり	75
第 7 章 結論	77
付 録 A Wald の公式の導出	79
付 録 B Cardy の公式の導出	86
付 録 C トレースアノマリーの計算	89
C.1 Weyl 対称性とその量子的破れ	89
C.2 トレースアノマリー (dilaton がいないケース)	90
C.3 Louville action	95
C.4 トレースアノマリー (dilaton があるケース)	96
付 録 D (2+1) 次元ブラックストリングとその蒸発過程	101
D.1 (2+1) 次元ブラックストリング解	101
D.2 (2+1) 次元ブラックストリングの不安定性	103
D.3 (2+1) 次元ブラックストリングの蒸発過程	107

第1章 イントロダクション

古典的にはブラックホールはものを吸い込むだけで内部から物質を放出することはできない。しかし、ブラックホール時空中の場の量子論を考えるとブラックホールは熱的な輻射 (Hawking 輻射) を出し蒸発していくことが分かる。ナイーブに考えればブラックホールはそのうち蒸発して消えてなくなると考えられる。しかし、ブラックホール蒸発の最終段階 (ブラックホール質量 $\sim M_{\text{Pl}}$) では、Hawking 輻射の温度が Planck 温度まで上がるため、背景時空への反作用とさらに量子重力の効果が効いてくる。そのため、蒸発の最終段階のダイナミクスや終状態についてはほとんど何も分かっていない。4次元ブラックホールについては、そのような Planck スケールの物理における問題は残されてはいるが、少なくとも Planck 質量になるまでは、準静的にやせていくだけであろうと考えられている。

ところで、近年、超弦理論の登場により多くの高次元ブラックホールの研究が行われてきた。重力は繰り込み不可能な相互作用であり、場の理論の通常の手続きによって重力を量子化することは不可能である。その重力の量子論として、現在最も有力なものが超弦理論である。これは、素粒子は Planck 長程度の大きさをもった 1次元の object であるとする理論である。超弦理論では、弦の世界面上にトレースアノマリーがでないと言う条件から時空の次元が 10次元と決まってしまう。しかし、我々が観測するのは 4次元時空である。残りの 6次元はどう考えればよいだろうか。10次元時空を 4次元時空に見えるようにするためには、余分な 6次元を小さくコンパクト化してやればよい (図 1.1)。このコンパクト化された余剰次元方向は内部空間と呼ばれている。通常このコンパクト化のスケールは Planck 長程度と考えられており、現在の実験のエネルギースケール ($\sim \text{TeV}$) では見ることはできないとする。このようなコンパクト化された時空のことを Kaluza-Klein 時空という。この Kaluza-Klein 時空でのブラックホールを考えてみよう。コンパクト化された空間で自然なブラックホールは内部空間に巻きついた形 (図 1.1) をしていると考えられる。このようなブラックホールを Kaluza-Klein ブラックホールといい、この論文での主な研究対象である。この Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発過程はどうなるであろうか。それは Planck スケールに到達する以前の段階で 4次元のものと大きく異なってくる可能性がある。その理由の一つとして、Kaluza-Klein ブラックホール特有の不安定性が挙げられる。ブラックホールホライズンがコンパクト化のスケールより小さい Kaluza-Klein ブラックホールは不安定であることが知られている。そのため、Hawking 輻射でブラックホールがやせていく段階で、ブラックホールが不安定化して、時空構造が大きく変化すると考えられる。二つ目の理由として、内部空間の存在が挙げられる。Hawking 輻射の反作用により、ブラックホールはやせていくのであるが、同様に内部空間も Hawking 輻射の反作用を受けて変化していく。特にこの内部空間のダイナミクスは、これまでの研究では全く考えられて来なかった。我々のこの修士論文での研究の目的は、Hawking 輻射による内部空間のダイナミクスを考慮に入れて Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発過程を明らかにすることである。実際の研究によりこれまで考えられていたものと全く違った蒸発の描像を得ることができた。

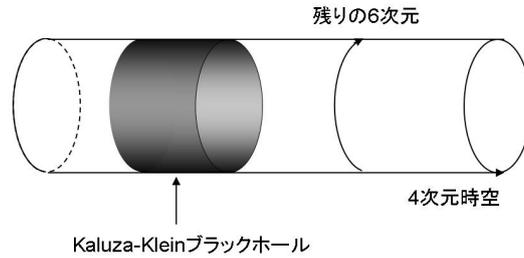


図 1.1: Kaluza-Klein 時空とブラックホール

4次元ブラックホールと高次元ブラックホールで蒸発過程が大きく異なるということは、宇宙論的にも重要である。インフレーション時に生成される揺らぎによりブラックホールが生成されると考えられている。このブラックホールからの Hawking 輻射が元素合成に影響を与えないと言う条件でブラックホールの寿命に制限がつき、そこからインフレーション理論への制限がつく。蒸発過程や終状態が大きく変わればインフレーション理論への制限も大きく変わってくるであろう。

本論文では、Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発過程をゲージアノマリーの観点から調べることも目標としている。最近の研究で、ゲージアノマリーを起源として Hawking 輻射とブラックホールエントロピーはそれぞれ理解できることが分かってきた。それを応用して、Hawking 輻射とブラックホールエントロピーの統一的理解を与え、さらに対称性の破れの時間変化を追うことによってブラックホール蒸発を調べることを考えている。

本論文の構成は次の通りである。第2章では、ブラックホール熱力学について説明する。熱力学的性質の中で最も興味深いのはエントロピーであり、その説明に重点がおかれている。ブラックホールエントロピーの量子的起源の理解は量子重力の理解につながると考えられており、エントロピーを量子的自由度の数え上げで説明する研究は多くなされている。その中で我々が注目しているのは、ゲージアノマリーとブラックホールエントロピーの関係に着目した方法でありそのレビューを行う。Hawking 輻射もアノマリーと関連していることが分かっており、アノマリーによるブラックホールエントロピーの理解は Hawking 輻射とブラックホールエントロピーの統一的理解につながると考えている。3章では、ブラックホール蒸発の基礎となる Hawking 輻射について説明する。その導出を3通りの方法で行う。まず最もスタンダードな Hawking の原論文の方法で Hawking 輻射の導出を行う。次に物質場の effective action を用いて Hawking 輻射を導出するトレースアノマリーの方法について説明する。この方法は、Hawking 輻射のエネルギー運動量テンソルを求めることが出来るので、Hawking 輻射の反作用を考えるとときに有用である。実際、第4章、第6章などではこの方法を応用している。さらに、gravitational anomaly の方法で Hawking 輻射を導出し、Hawking 輻射もアノマリーと関連していることを示す。この方法によって、Hawking 輻射とはゲージアノマリーの cancellation のために必要なフラックスである、という新しい解釈を与える

ことができる。この gravitational anomaly の方法の Kerr ブラックホール、Myers-Perry ブラックホールへの拡張は我々のオリジナルの研究である。第4章では、Hawking 輻射の反作用を考える。まず、4次元ブラックホールにおいてHawking 輻射の反作用を準静的に取り入れた議論を行いその問題点について述べる。次に、Hawking 輻射をダイナミカルに取り入れても厳密に解ける2次元ブラックホールのモデルを扱う。高次元の理論において対称性を課すことによって、理論が2次元に帰着できることがあるので、2次元ブラックホールの蒸発について考えておくことは有益である。実際、第6章で Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発過程を調べる際にも、理論を2次元理論に帰着させてから蒸発を解析することになる。第5章では、Kaluza-Klein 時空におけるブラックホールを扱う。特に、この論文で主に扱うことになるブラックストリング、ブラックブレーン解について説明する。Kaluza-klein ブラックホールの特性として重要なブラックホール解の不安定性についてもここで調べる。さらに、このダイナミカルな不安定性と熱力学的不安定性の関係も調べてある。第6章は、我々のオリジナルの研究で、この論文のメインテーマである Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発を調べる。内部空間のダイナミクスを考慮に入れて、Hawking 輻射の反作用を考える。その結果、ブラックホール蒸発の終状態に対する全く新しい予想を立てることができる。第7章では、この論文での結論を述べる。

第2章 ブラックホール熱力学

静的なブラックホールの性質の中で最も重要なことは、ブラックホールに熱力学的な性質があるということである。ブラックホールの蒸発過程や不安定性を調べるためには時空のダイナミカルな取り扱いが必要になるが、その定性的な振舞いはブラックホールの熱力学的性質により理解できることがある。よって、ダイナミカルな性質を調べる前に静的なブラックホールについて調べておくことは有益なことである。

ブラックホールの熱力学的性質を調べることによりブラックホールにエントロピーが存在することが見てとれる。それは Bekenstein-Hawking エントロピーと呼ばれ

$$S = \frac{A}{4\hbar G}$$

で与えられる [1]。A はホライズン面積である。ブラックホールにエントロピーが存在することは、ブラックホールのホライズン上にある量子的な自由度が存在することを示唆している。それゆえ、ブラックホールエントロピーの理解は量子重力理論のヒントになると考えられている。ブラックホールエントロピーの研究の目標は統計力学的に (自由度勘定で) エントロピーを説明して、その量子的起源を知ることである。

この章では、ブラックホールにおける熱力学量と熱力学の法則についてまとめる。その法則から、ブラックホールにエントロピーに対応するものが読み取れることを説明する。次にそのブラックホールエントロピー導出の統計力学的アプローチの一例を紹介する。その方法では、ホライズン上の一般座標変換不変性を破ることによってブラックホールエントロピーを説明することができる [2]。

2.1 ブラックホールの熱力学量

2.1.1 ブラックホール質量

ブラックホールにおける熱力学法則を説明するために、ブラックホールにおける熱力学変数の定義をしておかなければならない。まず、時空の“エネルギー”を表すブラックホール質量について説明する。ここから $c = G = 1$ の単位系を用いる。

定常かつ漸近的に平坦な時空の timelike Killing vector を $k = \partial/\partial t$ とする。ここで k は、無限遠で $k^2 = -1$ に規格化しているとする。さらに、Cauchy surface を V 、その無限遠の境界を ∂V とする。このとき、ブラックホール時空の質量 (エネルギー) は、

$$M = -\frac{1}{8\pi} \oint_{\partial V} dS_{\mu\nu} \nabla^\mu k^\nu \quad (2.1.1)$$

で定義される。このように定義された質量を Komar 質量と呼ばれる (今の場合は ADM 質量と言っても良い)。この定義がブラックホール質量として自然であることを確認しよう。

Gauss の定理を用いると、

$$M = -\frac{1}{4\pi} \int_V dS_\mu \nabla_\nu \nabla^\mu k^\nu \quad (2.1.2)$$

となる。さらに Killing ベクトル ξ に関する公式

$$\nabla_\rho \nabla_\mu \xi^\nu = R^\nu{}_{\mu\rho\sigma} \xi^\sigma \quad (2.1.3)$$

を使うと、

$$M = -\frac{1}{4\pi} \int_V dS_\mu R^\mu{}_\nu k^\nu \quad (2.1.4)$$

と書ける。今はブラックホール時空を考えているのであるが、ブラックホールの代わりに原点近傍に非相対論的なソース $T_{\mu\nu}$ ($T_{00} \gg T_{0i} \gg T_{ij}$) を置いてみよう。このとき、Einstein 方程式より、

$$R^\mu{}_\nu k^\nu = 8\pi(T^\mu{}_\nu k^\nu - \frac{1}{2}T k^\mu) \simeq 8\pi(T^\mu{}_0 + \frac{1}{2}T_{00}k^\mu) \quad (2.1.5)$$

となる。ここで、 V として $t = \text{const}$ 面をとると、

$$M = -2 \int_V d^3x (T^0{}_0 + \frac{1}{2}T_{00}) = \int_V d^3x T_{00} \quad (2.1.6)$$

が得られる。式 (2.1.1) はブラックホール時空の漸近状態を記述するように、ブラックホールの代わりに非相対論的な物質を置いたときのその非相対論的物質のエネルギーを表していることになる。

実際、Schwarzschild ブラックホールの質量を計算してみる。Schwarzschild 時空は、

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.1.7)$$

で与えられる。timelike Killing vector は、 $k = \partial/\partial t$ である。 V を t 一定面にとって、 ∂V を r 一定面にとる。このとき、質量は、

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{8\pi} \oint_{\partial V} dS_{\mu\nu} \nabla^\mu k^\nu \\ &= -\frac{1}{8\pi} \frac{1}{2!} \oint_{\partial V} dx^\rho \wedge dx^\sigma \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} \nabla^\mu k^\nu \\ &= -\frac{1}{16\pi} 4 \oint_{\partial V} d\theta \wedge d\varphi \epsilon_{\theta\varphi tr} \nabla^t k^r \quad (\because \text{Killing 方程式}) \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

となる。ここで、

$$\nabla^t k^r = g^{tt} \Gamma_{tt}^r = -\frac{m}{r^2} \quad (2.1.9)$$

と計算できるので、

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} d\theta \wedge d\varphi \sqrt{-g} \frac{m}{r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int r^2 d\Omega \frac{m}{r^2} = m \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

が得られる。よって、確かに m がブラックホールの質量を表していることが分かる。

Kerr ブラックホールの質量も計算しておく。Kerr 計量は、

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - 2a \sin^2 \theta \frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma} dt d\varphi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (2.1.11)$$

と書ける。ここで、

$$\begin{aligned} \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Delta &= r^2 - 2mr + a^2 \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

である。この計量の determinant は

$$\sqrt{-g} = \Sigma \sin \theta \quad (2.1.13)$$

で、計量の逆行列の (t, ϕ) 成分は

$$\begin{aligned} g^{tt} &= -\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta}, \\ g^{\phi\phi} &= \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta \sin^2 \theta}, \\ g^{t\phi} &= -\frac{a(r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma \Delta} \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

である。Schwarzschild ブラックホールのとくと同様に計算すると、

$$M = -\frac{1}{4\pi} \int d\theta d\varphi \Sigma \sin \theta \nabla^t k^r \quad (2.1.15)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \Sigma \nabla^t k^r &= \frac{m(r^2 + a^2)(-r^2 + a^2 \cos^2 \theta)}{\Sigma^2} \\ &\rightarrow -m \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

と計算できるので、

$$M = \frac{m}{4\pi} \int d\theta d\varphi \sin \theta = m \quad (2.1.17)$$

が得られる。

2.1.2 ブラックホールの角運動量

rotation Killing vector を $m = \partial/\partial\varphi$ とおく。 m は無限遠で $m^2 = 1$ に規格化しておく。このとき、角運動量の定義は、

$$J = \frac{1}{16\pi} \oint_{\partial V} dS_{\mu\nu} \nabla^\mu m^\nu \quad (2.1.18)$$

である。これも自然な定義であることを確認しよう。ブラックホール質量のときと同様に計算すると

$$J = \int_V dS_\mu (T^\mu{}_\nu m^\nu - \frac{1}{2} T m^\mu) \quad (2.1.19)$$

であり、 V として t 一定面をとると、

$$J = \int_V d^3x T^0{}_\nu m^\nu \quad (2.1.20)$$

となる。デカルト座標では

$$m \simeq x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} \quad (2.1.21)$$

と書けるので、

$$J = \int_V d^3x (T^0{}_2 x^1 - T^0{}_1 x^2) = \epsilon_{3jk} \int_V d^3x x^j T^{k0} \quad (2.1.22)$$

となる。これは、ブラックホール質量のときと同様に自然な角運動量の定義になっていることが分かる。

Kerr ブラックホールの角運動量を実際に計算してみる。Kerr 時空の asymptotic rotation Killing vector は $m = \partial/\partial\varphi$ である。Schwarzschild ブラックホールの質量を計算したときと同様に V を t 一定面、 ∂V を r 一定面にとる。このとき、

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{16\pi} \oint_{\partial V} dS_{\mu\nu} \nabla^\mu m^\nu \\ &= \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial V} d\theta \wedge d\varphi \epsilon_{\theta\varphi tr} \nabla^t m^r \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d\theta d\varphi \Sigma \sin\theta \nabla^t m^r \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \Sigma \nabla^t m^r &= \frac{Ma \sin^2 \theta (3r^4 + a^2 r^2 + a^2 r^2 \cos^2 \theta - a^4 \cos^2 \theta)}{\Sigma^2} \\ &\rightarrow 3Ma \sin^2 \theta \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

となることが計算できる。よって、

$$J = \frac{3}{4} Ma \int d\theta \sin^3 \theta = Ma \quad (2.1.25)$$

となり、 Ma が角運動量であることが分かる。つまり a は単位質量当たりの角運動量である。

2.1.3 surface gravity

Killing horizon \mathcal{N} に垂直な Killing ベクトルを ξ とすると、 \mathcal{N} 上の surface gravity κ は、

$$\xi^\nu \nabla_\nu \xi^\mu = \kappa \xi^\mu \quad (2.1.26)$$

で定義される。

この surface gravity の物理的意味を調べるために timelike Killing ベクトルの軌道に沿って走る粒子を考えてみる。その 4 元速度は、

$$w^\mu = \frac{\xi^\mu}{(-\xi^2)^{1/2}} \quad (2.1.27)$$

となる。timelike Killing 方向を時間座標として、その時間でこの粒子の加速度を測ってみると、

$$a^\mu = \xi^\nu \nabla_\nu w^\mu = \frac{\xi^\nu \nabla_\nu \xi^\mu}{(-\xi^2)^{1/2}} + \frac{\xi^\mu \xi^\nu \xi^\rho \nabla_\nu \xi_\rho}{(-\xi^2)^{3/2}} = \frac{\xi^\nu \nabla_\nu \xi^\mu}{(-\xi^2)^{1/2}} \quad (2.1.28)$$

となる。最後の等式で Killing 方程式を用いた。よって、Killing horizon 上では、

$$a^\mu = \frac{\kappa \xi^\mu}{(-\xi^2)^{1/2}} \quad (2.1.29)$$

となり、加速度の大きさとして、

$$a \equiv \sqrt{|a_\mu a^\mu|} = \kappa \quad (2.1.30)$$

が得られる。 ξ が無限遠で $\xi^2 = -1$ を満たすとき (ξ が無限遠での自然な時間座標のとき)、surface gravity は、無限遠の観測者が観測するホライズン上に止まっている粒子の加速度の大きさである。

漸近的平坦な定常ブラックホールの event horizon は必ず Killing horizon であることが示されており、今特に重要なのは event horizon の surface gravity である。Kerr ブラックホールの場合、event horizon は $\Delta = 0$ の位置、つまり $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ にある。この event horizon に垂直な Killing ベクトルは、

$$\xi^\mu = k^\mu + \frac{a}{r_+^2 + a^2} m^\mu \quad (2.1.31)$$

である。これを確かめるにはホライズンで regular な座標系を取らなくてはならない。座標変換、

$$\begin{cases} dv = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr \\ d\chi = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr \\ dr' = dr \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial \chi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r'} = \frac{\partial}{\partial r} - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{a}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (2.1.32)$$

を行うと、Kerr 計量は、

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dv^2 + 2dvdr' - 2a \sin^2 \theta \frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma} dvd\chi \\ & - 2a \sin^2 \theta d\chi dr' + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta d\chi^2 + \Sigma d\theta^2 \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

と書ける。この表式は、 $\Delta = 0$ で regular である。逆計量は、

$$\begin{aligned} g^{vv} &= \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} & g^{v\chi} &= \frac{1}{\Sigma} & g^{vr'} &= \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} \\ g^{\chi\chi} &= \frac{1}{\Sigma \sin^2 \theta} & g^{\chi r'} &= \frac{a}{\Sigma} \\ & & g^{r'r'} &= \frac{\Delta}{\Sigma} \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

となる。 $r = r_+$ 面の法線ベクトルは、

$$\begin{aligned} l &= g^{\mu\nu}(\partial_\nu r')\partial_\mu|_{r_+} = g^{r'\mu}\partial_\mu|_{r_+} \\ &= \frac{r_+^2 + a^2}{\Sigma(r_+)} \left(\frac{\partial}{\partial v} + \frac{a}{r_+^2 + a^2} \frac{\partial}{\partial \chi} \right) = \frac{r_+^2 + a^2}{\Sigma(r_+)} \xi \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

である。このベクトルはホライズン上で $l^2 = g^{r'r'} = 0$ となる。つまり、 $r = r_+$ は null surface である。さらに、 $l \propto \xi$ なので event horizon $r = r_+$ に垂直な Killing ベクトルは ξ であることが分かった。また、実際に計算することにより、

$$\xi^\nu \nabla_\nu \xi^\mu = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)} \xi^\mu \quad (r_\pm \equiv M \pm \sqrt{M^2 - a^2}) \quad (2.1.36)$$

が得られる。よって、Kerr ブラックホールホライズンの surface gravity は

$$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)} \quad (2.1.37)$$

で与えられることが分かった。

次に、これからしばしば必要となるので Schwarzschild 型の計量

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2.1.38)$$

の surface gravity を求めておこう。 $f(r)$ は、 $f(r_H) = 0$, $f(r) \rightarrow 1$ ($r \rightarrow \infty$) を満たすとする。このとき、計量 (2.1.38) はホライズンの位置が $r = r_H$ にあるような漸近的に平坦なブラックホール時空を表す。まず、ホライズンで regular な座標系に移る。座標変換

$$v = t + \int \frac{dr}{f(r)} \quad (2.1.39)$$

を行うと、計量 (2.1.38) は、

$$ds^2 = -f(r)dv^2 + 2dvdr + r^2d\Omega^2 \quad (2.1.40)$$

となる。この計量は $r = r_H$ で regular であることが分かる。この座標系を用いると、ホライズンに垂直な Killing ベクトル $k = \partial/\partial t = \partial/\partial v$ に対して、

$$k^\nu \nabla_\nu k^\mu = \frac{1}{2} f'(r_H) k^\mu \quad (2.1.41)$$

となることが計算できる。よって、surface gravity は、

$$\kappa = \frac{1}{2} f'(r_H) \quad (2.1.42)$$

となることが分かる。

2.1.4 ホライズン角速度

定常かつ漸近的平坦なブラックホール時空の future event horizon に垂直な Killing ベクトルを

$$\xi^\mu = k^\mu + \Omega_H m^\mu \quad (2.1.43)$$

と書いたとき、この Ω_H をホライズン角速度と言う。

Kerr ブラックホールでは、式 (2.1.31) から、

$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2} \quad (2.1.44)$$

となることが読み取れる。この ξ は

$$\xi^\mu \partial_\mu (\varphi - \Omega_H t) = 0 \quad (2.1.45)$$

を満たすので、 ξ の orbit は $\varphi = \Omega_H t + \text{const}$ である。つまりホライズンの null generator は、 k (無限遠での time translation) に比べて角速度 Ω_H で回転していることを意味している。

2.1.5 ホライズン面積

ブラックホールのホライズン面積は、ホライズン上の induced metric $h_{\mu\nu}$ を用いて、

$$A = \int_H d^2x \sqrt{h} \quad (2.1.46)$$

で定義される。Kerr ブラックホールの場合、ホライズンは $r = r_+$ 一定面だから、式 (2.1.33) より induced metric は、

$$h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{(r_+^2 + a^2)^2}{\Sigma} \sin^2 \theta d\chi^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (2.1.47)$$

となる。よって、

$$A = \int d\Omega (r_+^2 + a^2) = 4\pi (r_+^2 + a^2) \quad (2.1.48)$$

が得られる。

2.2 ブラックホールにおける熱力学の法則

前節で準備が整ったので、ブラックホール熱力学の第 0, 1, 2 法則について簡単に説明する。ここでは、真空解におけるブラックホールに話を限ることにする。その場合、ブラックホールは Kerr ブラックホールに限られてしまうので、Kerr ブラックホールに対して確かめれば十分である。より一般的な議論は例えば [3] で行っている。

第 0 法則

future event horizon 上で surface gravity κ は一定である。

第 1 法則

質量 M 、角運動量 J の定常ブラックホールの future event horizon での surface gravity を κ 、角速度を Ω_H 、 A を horizon 面積とする。 M 、 J を微小に変化させたとき、その変化量は

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ \quad (2.2.1)$$

に従う。

第 2 法則

宇宙検閲官仮説が正しいとすると、漸近的に平坦なブラックホール時空の future event horizon の面積は時間の非減少関数である。(Hawking の面積定理)

第 0 法則は、式 (2.1.37) で一定の surface gravity が得られたのですでに示されたことになる。第 1 法則も、実際に Kerr ブラックホールの κ 、 A 、 Ω_H の表式を代入することにより直ちに導かれる。

孤立系のブラックホール表面積は増大し、それは第 1 法則 (2.2.1) を満たす。通常の熱力学とのアナロジーにより、ブラックホール表面積 A がエントロピーに対応していることが読み取れる。 A がエントロピーだとすると、温度に対応するものとして surface gravity κ も読み取れる。第 0 法則はブラックホールホライズン上で“温度”が一定であることを示している。この“温度”は何の温度を表しているのだろうか。実は、第 3 章で Hawking 輻射の温度に対応していることが分かる。その Hawking 温度は係数も決まっています $T = \kappa/2\pi$ であることが示される。そこから、ブラックホールエントロピーの係数も決まって $S = A/4$ が得られる。

ブラックホールの熱力学的性質の中で最も重要なのは、エントロピーが存在することである。ここまでの議論は 4 次元の真空解に話を限っていた。しかし、近年、超弦理論の登場により、高次元ブラックホールの研究が進んできたし、ダークマター、ダークエネルギーの解決策として、重力理論そのものの変更も考えられるようになった。そのような、4 次元 Einstein 理論と異なる理論に対して上記の熱力学の法則を調べることは重要である。この論文の目的も Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発過程の研究なので熱力学の法則の拡張はやっておかねばならないことである。そこで、任意の一般座標変換不変な作用から、熱力学的エントロピーを計算することができる Wald の公式 [4, 5] について説明していこう。漸近的平坦、定常な n 次元ブラックホールのエントロピーは

$$S = -2\pi \int_H d^{n-2}x \sqrt{h} \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \delta R_{\mu\nu\alpha\beta} \right) \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta} \quad (2.2.2)$$

H : horizon の spatial section

h : H の induced metric の determinant

$\epsilon_{\mu\nu}$: H の binormal つまり、 H に垂直な空間の volume form

I : 一般座標変換不変な作用

で与えられる。ここで、作用は一般座標変換不変性のあるならなんでもよく、非常に一般性の高い公式になっている。ただし、作用に現れる任意の場 ϕ は、ホライズンに垂直な Killing ベクトル ξ に対し $\mathcal{L}_\xi \phi = 0$ を満たす必要がある。付録 A で示されることだが、このエント

ロピーを用いるとブラックホールにおける熱力学第一法則

$$dM = TdS + \Omega_H^{(\mu)} dJ_{(\mu)} \quad (2.2.3)$$

が成り立つ。ここで T は Hawking 温度で $T = \kappa/2\pi$ である。また、ブラックホール質量 M , 角運動量 $J_{(\mu)}$, ホライズン角速度 $\Omega_H^{(\mu)}$ の厳密な定義は、付録 A で行っている。ここではこの公式を使って実際にエントロピーを計算してみよう。Einstein 重力のときは Einstein-Hilbert 作用

$$I = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \sqrt{-g} R \quad (2.2.4)$$

を Wald の公式 (2.2.2) に代入すると、

$$\begin{aligned} S &= -2\pi \int_H d^{D-2} x \sqrt{h} \frac{g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}}{16\pi G_D} \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{4G_D} \int_H d^{D-2} x \sqrt{h} \quad (\because g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta} = -2) \\ &= \frac{A_H}{4G_D} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

が得られる。ここで、 A_H はホライズン面積である。これは、Einstein 重力におけるブラックホールエントロピーはホライズン面積に比例するというよく知られた結果である。また、この先度々現れる dilaton gravity

$$I = M_D^{D-2} \int d^D x \sqrt{-g} f(\phi) (R + 2a(\nabla\phi)^2 + V(\phi)) \quad (2.2.6)$$

についても計算しておく。この作用を Wald の公式 (2.2.2) に代入すると、

$$\begin{aligned} S &= -2\pi M_D^{D-2} \int_H d^{D-2} x \sqrt{h} f(\phi) g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta} \\ &= 4\pi M_D^{D-2} \int_H d^{D-2} x \sqrt{h} f(\phi) \\ &= 4\pi M_D^{D-2} f(\phi_H) A_H \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

で与えられる。 ϕ_H はホライズン上での ϕ の値である。最後の等式で、 $\mathcal{L}_\xi \phi = 0$ となることを用いた。

また、この公式はブラックホール質量を計算するにも便利な公式である。回転していないブラックホールのエントロピーは熱力学第一法則

$$dM = TdS \quad (2.2.8)$$

を満たす。この第一法則を積分することによりブラックホール質量を計算できる。この方法で求められる質量 M は付録 A で定義しているものであるが、Einstein 重力については ADM 質量と一致していることが [4, 5] で確かめられている。例として 4 次元 Einstein 重力における Schwarzschild 解

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{C}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.2.9)$$

の質量を計算してみよう。式 (2.1.42) より、Hawking 温度は、

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{4\pi C} \quad (2.2.10)$$

であり、ブラックホールエントロピーは、

$$S = \frac{A}{4} = \pi C^2 \quad (2.2.11)$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} dM &= \frac{1}{4\pi C} d(\pi C^2) = \frac{1}{2} dC \\ \Rightarrow M &= \frac{C}{2} \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

となり、よく知られた Schwarzschild ブラックホールの質量を得ることができる。

2.3 horizon constraint の方法

このブラックホールエントロピーは何が生み出しているのだろうか。その起源をホライズン上のゲージアノマリーに求める考え方がある。ホライズン上でのゲージアノマリーにより、そこでゲージモードが物理的モードに変わる。その新たな自由度でエントロピーを説明する、というアイデアである。Hawking 輻射も gravitational anomaly により説明できることが 3.3 節で分かるので、アノマリーが起源であると考えることにより Hawking 輻射とブラックホールエントロピーの統一的理解ができるかもしれない。ここでは、ホライズンを時空の境界として扱うことにより、ホライズン上の一般座標変換不変性を破る horizon constraint の方法 [2] について説明する。

2.3.1 2次元 dilaton gravity

ここで考える作用は、dilaton gravity

$$I[A, g] = \int d^2x \sqrt{-g} (AR + V(A)) \quad (2.3.1)$$

である。 A はスカラー場である。ここから $c = \hbar = 16\pi G = 1$ の単位系を用いる。この理論について少し説明しておこう。高次元の理論にある対称性を課すと、この dilaton gravity に落ちることがある。例えば、Einstein 重力

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (2.3.2)$$

において、球対称性を課す。つまり

$$ds^2 = g_{ab}^{(2)}(x^a) + e^{-2\phi(x^a)} d\Omega_2^2 \quad (2.3.3)$$

と仮定すると、式 (2.3.2) は、

$$I = 4\pi \int d^2x \sqrt{-g_{(2)}} e^{-2\phi} (R^{(2)} + 2(\nabla\phi)^2 + 2e^{2\phi}) \quad (2.3.4)$$

となる。さらに、 $A \equiv 4\pi e^{-2\phi}$, $\tilde{g}_{ab} \equiv 2e^{-\phi} g_{ab}^{(2)}$ とおくと、

$$I = \int d^2x \sqrt{-\tilde{g}} (A\tilde{R} + 8\pi^{3/2} A^{-1/2}) \quad (2.3.5)$$

が得られる。よって、式 (2.3.1) は 4 次元の Einstein 重力において球対称性を仮定した理論の一般化ということもできる。ここで、 $A = 4\pi e^{-2\phi}$ は 4 次元の理論でいうと “ r ” 一定面の表面積である。

式 (2.3.1) から導かれる運動方程式の解は一意的に決まってしまって、

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(J(x) - C)dt^2 + (J(x) - C)dx^2 \\ A &= x \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

である [6]。ここで、

$$J(A) = \int V(A') dA' \quad (2.3.7)$$

である。 $J(x) = C$ がホライズンであり、作用 (2.3.1) はブラックホール解を含む理論であるということが分かった。

次に、このブラックホールのエントロピーを計算しておこう。Wald の公式を使うと dilaton gravity におけるエントロピー

$$\begin{aligned} S &= -2\pi \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta I}{\delta R_{\mu\nu\alpha\beta}} \epsilon_{\mu\nu\epsilon\alpha\beta} \Big|_H \\ &= -2\pi A g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \epsilon_{\mu\nu\epsilon\alpha\beta} \\ &= 4\pi A_H \\ &= \frac{A_H}{4\hbar G} \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

が得られる (添え字の H はホライズン上の値であることを表す)。これが熱力学的なエントロピーである。このエントロピーを状態数の勘定で得ることが目標である。

2.3.2 dilaton gravity の正準形式

対称性の満たす代数を具体的にみるために正準形式に移ろう。null dyad $\{l^a, n^a\}$ を用いる。これらは、

$$l \cdot n = -1, \quad l^2 = n^2 = 0, \quad g_{ab} = -l_a n_b - l_b n_a \quad (2.3.9)$$

を満たす。ここで、

$$\begin{aligned} \nabla_a l_a &= -\kappa n_a l_b - \bar{\kappa} l_a l_b \\ \nabla_a n_b &= \kappa n_a n_b + \bar{\kappa} l_a n_b \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

で $\kappa, \bar{\kappa}$ を定義しておく。 l, n を座標基底で展開して

$$\begin{aligned} l &= \sigma du + \alpha dv \\ n &= \beta du + \tau dv \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

とおくと、Lagrangianは、

$$L = \frac{1}{\sigma\tau - \alpha\beta} [2(\tau\dot{A} - \beta A')(\dot{\alpha} - \sigma') + 2(\alpha\dot{A} - \sigma A')(\dot{\tau} - \beta')] + (\sigma\tau - \alpha\beta)V(A) \quad (2.3.12)$$

と書ける。ここで $\dot{} \equiv \partial/\partial u$, $' \equiv \partial/\partial v$ とした。さらに、 $\kappa, \bar{\kappa}$ は、

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{\sigma\tau - \alpha\beta}(\dot{\alpha} - \sigma') \\ \bar{\kappa} &= \frac{1}{\sigma\tau - \alpha\beta}(\dot{\tau} - \beta') \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

である。Lagrangian(2.3.12) から正準運動量が計算できて、

$$\begin{aligned} \pi_\alpha &\equiv \frac{\delta I}{\delta \alpha} = \frac{2}{\sigma\tau - \alpha\beta}(\tau\dot{A} - \beta A') \\ \pi_\tau &\equiv \frac{\delta I}{\delta \tau} = \frac{2}{\sigma\tau - \alpha\beta}(\alpha\dot{A} - \sigma A') \\ \pi_A &\equiv \frac{\delta I}{\delta A} = \frac{2}{\sigma\tau - \alpha\beta}[\tau(\dot{\alpha} - \sigma') + \alpha(\dot{\tau} - \beta')] \\ \pi_\sigma &\equiv \frac{\delta I}{\delta \sigma} = 0 \\ \pi_\beta &\equiv \frac{\delta I}{\delta \beta} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

となる。これらから、ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \pi_\alpha \dot{\alpha} + \pi_\tau \dot{\tau} + \pi_A \dot{A} - L \\ &= \sigma C_\perp + \frac{\beta}{\tau}(C_\parallel - \alpha C_\perp) \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

となる。ここで、 C_\perp は Hamiltonian constraint、 C_\parallel は momentum constraint で、

$$\begin{aligned} C_\perp &= -\pi'_\alpha + \frac{1}{2}\pi_\alpha \pi_A - \tau V(A) \\ C_\parallel &= \pi_A A' - \alpha \pi'_\alpha - \tau \pi'_\tau \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

である。また式(2.3.14)をみると

$$C_\pi = \tau \pi_\tau - \alpha \pi_\alpha + 2A' = 0 \quad (2.3.17)$$

の constraint があることが読み取れる。この constraint は dyad を用いたことによる新たなゲージ対称性 $l \rightarrow f(x)l$, $n \rightarrow f(x)^{-1}n$, (f は任意関数) 起源のものである。これらの constraint は、ゲージ変換の generator である。例えば、

$$\{A, C_\parallel[\xi]\} = \xi A' \quad (C_\parallel[\xi] \equiv \int dv \xi C_\parallel) \quad (2.3.18)$$

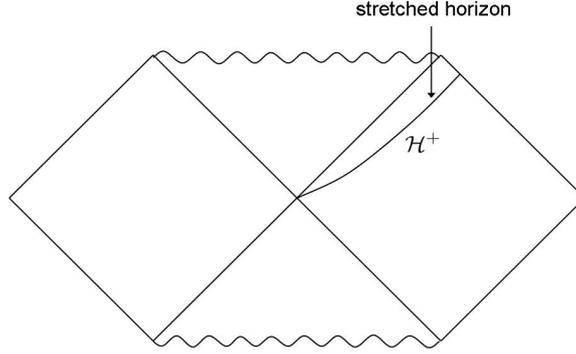


図 2.1: stretched horizon

となり、確かに C_{\parallel} は v 方向のゲージ変換の generator になっている。代数関係は

$$\begin{aligned}
\{C_{\perp}[\xi], C_{\perp}[\eta]\} &= 0 \\
\{C_{\parallel}[\xi], C_{\perp}[\eta]\} &= C_{\perp}[\xi\eta'] \\
\{C_{\parallel}[\xi], C_{\parallel}[\eta]\} &= C_{\parallel}[\xi\eta' - \eta\xi'] \\
\{C_{\perp}[\xi], C_{\pi}[\eta]\} &= C_{\perp}[\xi\eta] \\
\{C_{\parallel}[\xi], C_{\pi}[\eta]\} &= C_{\pi}[\xi\eta'] \\
\{C_{\pi}[\xi], C_{\pi}[\eta]\} &= 0
\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

であり、閉じていることが確かめられる。

2.3.3 horizon constraint とアノマリー

ここまでの議論は dilaton gravity の性質を調べただけで、ブラックホール時空を扱っている、という情報は入っていない。ここで、ホライズンの情報を手で input しよう。一つ目は、ホライズンは $u = 0$ 一定面であり、それは null surface とする。つまり、 $du \parallel l = \sigma du + \alpha dv$ を要請する。これは

$$\alpha = \epsilon_1 \ll 1 \tag{2.3.20}$$

と書ける。ここで計算上の理由で $\alpha = 0$ でなく微小にしておいた。このときホライズンは図 2.1 のように stretch していることになる (stretched horizon)。あとで $\epsilon_1 \rightarrow 0$ とする。二つ目は expansion がゼロであることを要請する。2次元時空で普通の意味の expansion は定義できないが、 $\theta = l^a \nabla_a A / A$ で定義することにする。これは、式 (2.3.5) の下でコメントしているように A が “ r ” 一定面の面積に対応することを考えれば自然な定義である。この要請を

$$\frac{l^a \nabla_a A}{\kappa A} = \epsilon_2 \ll 1 \tag{2.3.21}$$

と書く。ここで、 l にはスケールの任意性 $l \rightarrow al$ があるため、この変換で $\kappa \rightarrow a\kappa$ となる κ で規格化してこの任意性を打ち消した。式 (2.3.21) を書き直すと

$$A' - \frac{1}{2}\epsilon_2 A_H \pi_A = 0 \quad (2.3.22)$$

となる。 A_H はホライズン上の A の値である。よって、手に入れる constraint は

$$\begin{aligned} K_1 &= \alpha - \epsilon_1 \\ K_2 &= A' - \frac{1}{2}\epsilon_2 A_H \pi_A + \frac{a}{2}C_\pi \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

の二つである。ここで、constraint $C_\pi = \tau\pi_\tau - \alpha\pi_\alpha + 2A' = 0$ があるために、物理的には A' と $-(\tau\pi_\tau - \alpha\pi_\alpha)/2$ は区別がつかない。その不定性を考慮するために K_2 に $(a/2)C_\pi$ の項を加えてある。 a はフリーパラメーターとして残しておくことにする。 K_1 と K_2 は second class の constraint で同時刻交換関係

$$\{K_i(u, v), K_j(u, v')\} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{2}\alpha\delta(v-v') \\ \frac{a}{2}\alpha\delta(v-v') & -(1+a)\epsilon_2 A_H \frac{\partial}{\partial v}\delta(v-v') \end{pmatrix} \quad (2.3.24)$$

を満たす。ある物理量 P と

$$P^* \equiv P + c_1 K_1 + c_2 K_2 \quad (2.3.25)$$

は、物理的には同じものである。ここで、この c_1, c_2 は

$$\{P(u, v), K_i(u, v')\}^* \equiv \{P^*(u, v), K_i(u, v')\} = 0 \quad (2.3.26)$$

を満たすように決める。ここで、 $\{, \}^*$ は Dirac 括弧である。この Dirac 括弧は $K_1 = K_2 = 0$ を満たす位相空間上の自然な Poisson 括弧になっているので、Dirac 括弧を用いていれば constraint K_1, K_2 を考慮する必要がなくなる。 C_{\parallel}^* と C_π^* を求めると

$$\begin{aligned} C_{\parallel}^* &= C_{\parallel} + \frac{4(1+a)}{a^2}\epsilon_2 A_H \frac{K_1''}{\epsilon_1} - \frac{2}{a}K_2' \\ C_\pi^* &= C_\pi + \frac{2}{a}(1 + \frac{2}{a})\epsilon_2 A_H \frac{K_1'}{\epsilon_1} - \frac{2}{a}K_2 \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

となる。この C_{\parallel}^* と C_π^* を使って代数関係を確かめると

$$\begin{aligned} \{C_{\parallel}[\xi], C_{\parallel}[\eta]\}^* &= C_{\parallel}[\xi\eta' - \eta\xi'] - \frac{2(1+a)}{a^2}\epsilon_2 A_H \int dv(\xi'\eta'' - \eta'\xi'') \\ \{C_{\parallel}[\xi], C_\pi[\eta]\}^* &= C_\pi[\xi\eta'] + \frac{2}{a}(\frac{2}{a} + 1)\epsilon_2 A_H \int dv\xi'\eta' \\ \{C_\pi[\xi], C_\pi[\eta]\}^* &= -\frac{2}{a^2}\epsilon_2 A_H \int dv(\xi\eta' - \eta\xi') \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

となる。ここから代数が閉じていないことが分かる。ここで、 $\{C_{\parallel}[\xi], C_\pi[\eta]\}^*$ の anomalous なタームが消えるように $a = -2$ とおいて、

$$\frac{c}{48\pi} \equiv -\frac{1}{2}\epsilon_2 A_H \quad (2.3.29)$$

のように c を定義すると、

$$\{C_{\parallel}[\xi], C_{\parallel}[\eta]\}^* = C_{\parallel}[\xi\eta' - \eta\xi'] - \frac{c}{48\pi} \int dv(\xi'\eta'' - \eta'\xi'') \quad (2.3.30)$$

が得られる。この代数は Virasoro 代数と呼ばれている。 c は central charge で“対称性の破れ具合”を表す量である。この代数を量子化 ($\{, \}^* \rightarrow -i[,]$) をすると、

$$[C_{\parallel}[\xi], C_{\parallel}[\eta]] = iC_{\parallel}[\xi\eta' - \eta\xi'] - \frac{ic}{48\pi} \int dv(\xi'\eta'' - \eta'\xi'') \quad (2.3.31)$$

となる。

2.3.4 エントロピーの計算

C_{\parallel} をモード展開して、

$$L_n \equiv C_{\parallel}[\xi_n] \quad (\xi_n \equiv \frac{A}{2\pi A'} e^{2\pi i n A/A_H}) \quad (2.3.32)$$

とする。ここで、Cardy の公式

$$\ln \rho(\Delta) \sim 2\pi \sqrt{\frac{c\Delta}{6}} \quad (2.3.33)$$

を用いる。ここで、 L_0 の固有値 Δ をもつ状態数を $\rho(\Delta)$ とした。この公式は付録 B で導出されている。 c は式 (2.3.29) で求めている。あとは Δ を求める必要がある。 L_0 は古典的には消えるべき値であるので、 $\Delta = 0$ となってしまうようである。しかし、これは、stretched horizon の境界 (stretched horizon と本当のホライズンがぶつかる点) を考えるとうまく行く。その境界を $v = v_H$ としよう。このとき、 C_{\parallel} の変分をすると boundary term が残ってしまう。そこで、

$$C_{\parallel}[\xi] \rightarrow C_{\parallel}[\xi] - \xi\pi_A A|_{v_H} \quad (2.3.34)$$

とおき直す。 $\delta\pi_A = \delta K_1 = \delta K_2 = 0$ のとき、上の表式を変分しても boundary term が残らないことが確かめられる。このようにおき直しておけば、 $C_{\parallel}[\xi]$ は古典的には消えてしまっても $-\xi\pi_A A|_{v_H}$ は残ってくれる。よって、 $\Delta = -\xi_0\pi_A A|_{v_H}$ とおくことにする。このとき

$$\Delta = - \left. \frac{A_H^2 \pi_A}{2\pi A'} \right|_{v_H} = - \frac{A_H}{\pi\epsilon_2} \quad (2.3.35)$$

と計算できる。 $\hbar, 16\pi G$ を復活させると、

$$\begin{aligned} c &= - \frac{3\epsilon_2 A_H}{2\hbar G} \\ \Delta &= - \frac{A_H}{16\pi^2 \hbar G \epsilon_2} \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

となり、これらを式 (2.3.33) に代入するとエントロピー

$$S = 2\pi \sqrt{\frac{1 - 3\epsilon_2 A_H}{6} \frac{-A_H}{2\hbar G} \frac{-A_H}{16\pi^2 \hbar G \epsilon_2}} = \frac{A_H}{4\hbar G} \quad (2.3.37)$$

が得られる。これは正しいエントロピーを与えていることが分かる。

2.3.5 解釈

なぜ対称性を破ったらエントロピーが出てきたのであろうか。 $c = 0$ のとき、つまり anomalies が無いとき、量子論における物理的状態の条件は

$$L_n|\text{phys}\rangle = 0 \quad (2.3.38)$$

である。これは、物理的状態は必ず $L_0|\text{phys}\rangle = 0$ を満たし、式 (2.3.33) で表されるエントロピーは存在しないことを示している。では $c \neq 0$ のときはどうであろうか。このときに物理的状態の条件 (2.3.38) を課してしまうと、

$$0 = [L_m, L_n]|\text{phys}\rangle = ((m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m^3\delta_{m+n})|\text{phys}\rangle = \frac{c}{12}m^3\delta_{m+n}|\text{phys}\rangle \quad (2.3.39)$$

となり矛盾する。このときはより弱い条件、例えば

$$\langle\text{phys}|L_n|\text{phys}\rangle = 0 \quad (2.3.40)$$

を課す必要がある。この条件では $L_0|\text{phys}\rangle \neq 0$ も許され、式 (2.3.33) で表されるエントロピーが値を持つてくる。このことは次のように解釈される。 $c = 0$ のときは、ゲージモードだった状態がホライズン上 $c \neq 0$ となったがために物理的状態に変化した。その新しい自由度がブラックホールエントロピーを生み出したのである。

第3章 Hawking 輻射

ブラックホールには熱力学の法則が成り立ち、さらにホライズン面積 A がエントロピーに対応することが分かった。ここで、第1法則

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA$$

を見てみると、温度に対応する $T \propto \kappa$ も読み取ることができる。これは何の温度を表すのであろうか。ブラックホール時空上の場の量子論を考えると、ブラックホールは熱的に輻射をすることが分かる。実は、その温度が $T \propto \kappa$ なのである。この輻射のことを Hawking 輻射という。この Hawking 輻射によりブラックホールは蒸発する。それゆえ、Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発を調べるためには、この Hawking 輻射を理解することは不可欠である。また、Hawking 輻射は相対論的な時空と物質場の量子論を組み合わせ得られるものであり、量子重力理論のヒントになり得ると考えられている。そのため Hawking 輻射はブラックホール物理の重要な研究テーマの一つとなっている。

この章では、固定された背景時空上の Hawking 輻射を考え、反作用を無視した議論をする。まず原論文の方法 [7, 3] で Hawking 輻射を導出する。さらに、Hawking 輻射のエネルギ運動量テンソルを計算できるトレースアノマリーの方法を紹介する [8, 9]。また、ホライズン近傍での一般座標変換不変性の破れと Hawking 輻射の関係に注目した gravitational anomaly の方法も紹介する [10, 11, 12]。gravitational anomaly の方法の Kerr ブラックホール、Myers-Perry ブラックホールへの拡張は我々のオリジナルの研究ある。

3.1 Hawking の方法

3.1.1 Schwarzschild ブラックホール

Hawking 輻射の導出に必要なので、まず Schwarzschild ブラックホールについて簡単に説明しておこう。Schwarzschild ブラックホール解は

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.1.1)$$

で表される ($c = G = 1$)。この表式が singular な点として $r = 2M$, $r = 0$ がある。 $r = 0$ は物理的な特異点であるが、 $r = 2M$ は座標特異点であり物理的な特異点ではない。そのことは例えばスカラー量 $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = 48M^2/r^6$ を計算すれば見て取れる。実際に $r = 2M$ の座標特異点を座標変換で消してみよう。まず、

$$r^* = r + 2M \ln \left(\frac{r - 2M}{2M} \right) \quad (3.1.2)$$

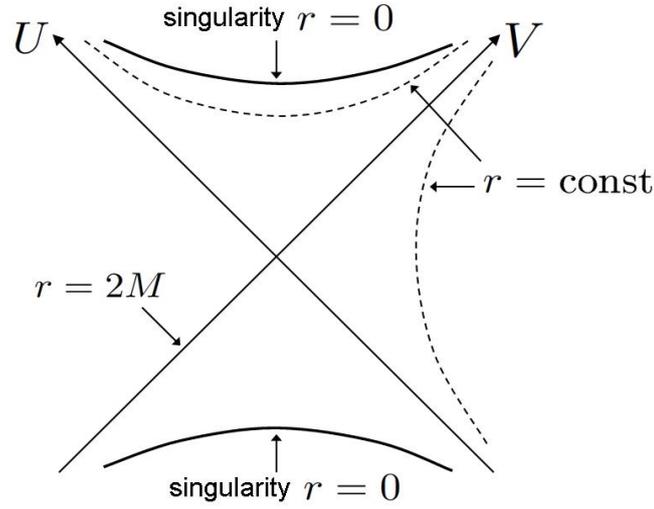


図 3.1: Kruskal 座標での時空図

を定義し、

$$\begin{aligned} u &= t - r^* \\ v &= t + r^* \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

とおくと

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv + r^2 d\Omega^2 \quad (3.1.4)$$

が得られる。この座標ではまだ $r = 2M$ で singular であるので、さらに座標変換

$$\begin{aligned} U &= -e^{-u/4M}, \\ V &= e^{v/4M} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

を行うと、

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dUdV + r^2 d\Omega^2 \quad (3.1.6)$$

となる。この (U, V) 座標を Kruskal 座標という。上の表式は $r = 2M$ で正則であることが分かる。 $r = r(U, V)$ は陽に書くことはできないが、

$$UV = -\frac{r - 2M}{2M} e^{r/2M} \quad (3.1.7)$$

で r は (U, V) の関数として決まっている。singularity の位置 $r = 0$ は (U, V) 座標では $UV = 1$ である。よって、この時空構造は図 3.1 のようになる。もう少し見やすくするために座標変換

$$\begin{aligned} U &= \tan \tilde{U} \\ V &= \tan \tilde{V} \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

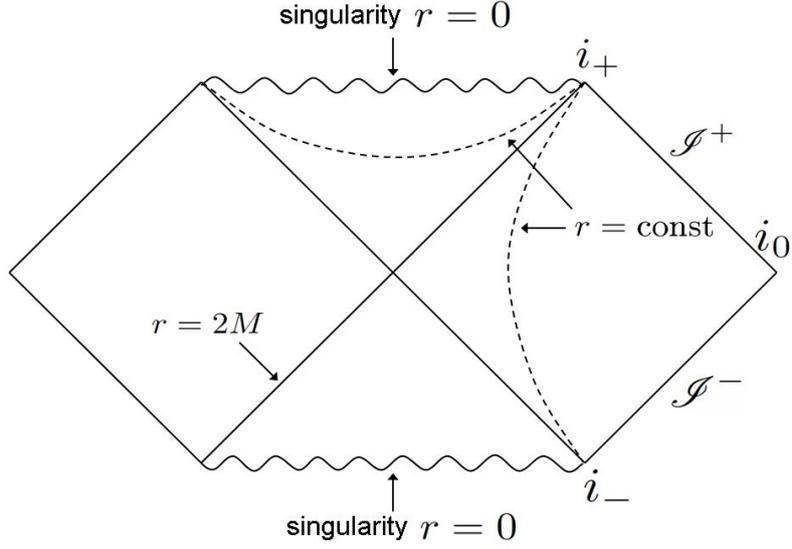


図 3.2: Schwarzschild ブラックホールの Penrose 図

を行う。この座標では、無限遠点を有限の座標点で表すことができる。この座標で書いた時空間図は図 3.2 のようになる。この時空間図は Penrose 図と呼ばれている。このブラックホールは無限過去から存在しているものを考えている。星の重力崩壊でブラックホールが形成される、という状況を考えるときは星の外側の Schwarzschild 時空間と星の内側の時空間をつなげば良い。その Penrose 図は図 3.3 のようになる。

3.1.2 曲がった時空間上のスカラー場の量子化

Hawking 輻射は、物質場の量子効果により得られるものなので曲がった時空間上の場の量子論を考よう。ここでは、物質場としてスカラー場

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \quad (3.1.9)$$

を考える。この作用から導かれる運動方程式は Klein-Gordon 方程式

$$(\square - m^2)\phi = 0 \quad (3.1.10)$$

である。この方程式の解空間 \mathcal{S} の基底を $\{\phi_n\}$ とする。さらにここで、 \mathcal{S} 内での symplectic 内積

$$\phi_\alpha \wedge \phi_\beta = \int_{\Sigma} dS_\mu \phi_\alpha \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi_\beta \quad (3.1.11)$$

を定義しておく。 Σ は Cauchy surface で、 $f \overleftrightarrow{\partial}_\mu g \equiv f \partial_\mu g - g \partial_\mu f$ である。この内積は Σ の選び方に依らない。なぜなら、Gauss の定理を使えば、

$$(\phi_\alpha \wedge \phi_\beta)_\Sigma - (\phi_\alpha \wedge \phi_\beta)_{\Sigma'} = \int_S d^4x \nabla_\mu (\phi_\alpha \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi_\beta) \quad (3.1.12)$$

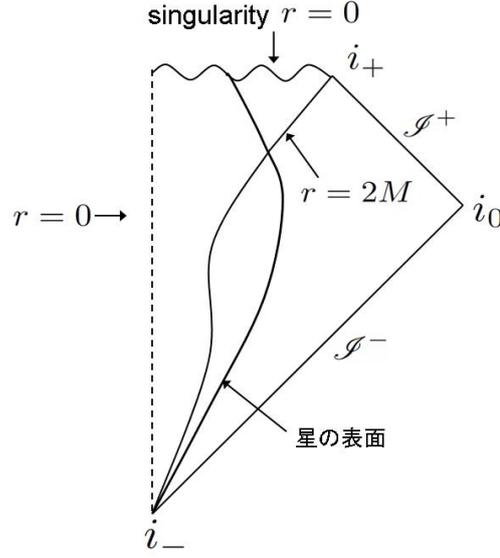


図 3.3: 球対称重力崩壊の Penrose 図

となり (S は Σ と Σ' で囲まれる 4 次元空間)、

$$\nabla_\mu(\phi_\alpha \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi_\beta) = \phi_\alpha \square \phi_\beta - \phi_\beta \square \phi_\alpha = m^2 \phi_\alpha \phi_\beta - m^2 \phi_\beta \phi_\alpha = 0 \quad (3.1.13)$$

となるからである。 $\phi_\alpha \wedge \phi_\beta$ は α, β に対し反対称である。よって、基底の変換によって

$$(\phi_\alpha \wedge \phi_\beta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & -1 & 0 & \end{pmatrix} \quad (3.1.14)$$

の形に持って行ける。この基底では、

$$\phi_1 \wedge \phi_2 = \phi_3 \wedge \phi_4 = \phi_5 \wedge \phi_6 = \cdots = 1 \quad (3.1.15)$$

である。ここで、 $\psi_n \equiv (\phi_{2n-1} - i\phi_{2n})/\sqrt{2}$ のように複素基底を導入する。複素関数に対する内積

$$(\psi_i, \psi_j) = i \int_\Sigma dS_\mu \psi_i^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi_j \quad (3.1.16)$$

を定義すると、 $\{\psi_i\}$ は

$$\begin{pmatrix} (\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij} & (\psi_i, \psi_j^*) = 0 \\ (\psi_i, \psi_j^*) = 0 & (\psi_i^*, \psi_j^*) = -\delta_{ij} \end{pmatrix} \quad (3.1.17)$$

のように規格直交化されていることがわかる (この内積は正定値でないため、 $\|\psi_i^*\|^2 < 0$ となることに注意)。この基底を用いて、スカラー場を

$$\phi = \sum_i (a_i \psi_i + a_i^* \psi_i^*) \quad (3.1.18)$$

と展開する。さらに、量子化して演算子として見れば、

$$\phi = \sum_i (a_i \psi_i + a_i^\dagger \psi_i^*) \quad (3.1.19)$$

となる。生成、消滅演算子は、

$$[a_i, a_j] = 0, \quad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (3.1.20)$$

となるように要請する。真空は、

$$a_i |\text{vac}\rangle = 0 \ (\forall i), \quad \langle \text{vac} | \text{vac} \rangle = 1 \quad (3.1.21)$$

で定義する。式 (3.1.17) を満たす基底の選び方は一意的でなく、それゆえに生成、消滅演算子の定義も一意的でない。したがって、上の真空の定義は基底の選び方によるものである。式 (3.1.17) を満たしながら行える基底の変換を調べておこう。

$$\psi'_i = \sum_j (A_{ij} \psi_j + B_{ij} \psi_j) \quad (3.1.22)$$

とおく。逆変換は、

$$\psi_i = \sum_j ((A^\dagger)_{ij} \psi'_j - (B^T)_{ij} \psi'_j) \quad (3.1.23)$$

となることはすぐにチェックできる。 $\{\psi_i\}$ と $\{\psi'_j\}$ が式 (3.1.17) を満たすという要請から、 A, B に対する条件

$$\begin{aligned} AA^\dagger - BB^\dagger &= 1 \\ AB^T - BA^T &= 0 \\ A^\dagger A - B^T B^* &= 1 \\ A^\dagger B - B^T A^* &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

が得られる。一般の曲がった時空に対しては自然な基底 $\{\psi_i\}$ の選び方は存在しない。しかし、静的な時空に対しては time like Killing ベクトル k^μ を対角化するような基底を選ぶのが自然であろう。つまり、

$$k^\mu \partial_\mu u_i = -i\omega_i u_i \quad (3.1.25)$$

にとる。このように基底をとれるためには、まず $k^\mu \partial_\mu$ が \mathcal{S} 内の演算子として well defined でなければならない。つまり、 $k^\mu \partial_\mu$ は \mathcal{S} の元を \mathcal{S} の元に移さなければならない。さらに、 $k^\mu \partial_\mu$ は対角化可能でなければならない。これらは、次のようにして示される。 $k = \partial/\partial t$ となるような時間座標 t をとろう。このとき、計量を t に依らないようにすることができる。よって、 $\phi \in \mathcal{S}$ とすれば、

$$\begin{aligned} (\square - m^2) k^\mu \partial_\mu \phi &= \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu - m^2 \right) \partial_t \phi \\ &= \partial_t \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu - m^2 \right) \phi = 0 \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

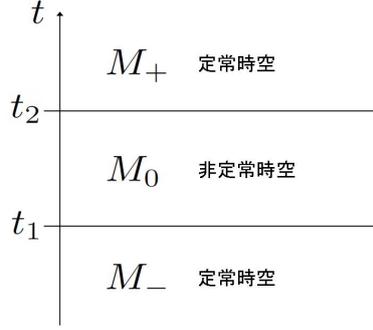


図 3.4: 非定常時空の例

となるので、 $k^\mu \partial_\mu \phi \in \mathcal{S}$ である。ここでさらに Σ として、時間一定面を取ろう。このとき、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f, g\right) + \left(f, \frac{\partial}{\partial t} g\right) = i \int d^3x \sqrt{g_{(3)}} (f^* \partial_t^2 g - g \partial_t^2 f^*) \quad (3.1.27)$$

となる。ここで、 $g_{(3)}$ は計量の空間部分の determinant である。Klein-Gordon 方程式より、

$$\partial_t^2 = \nabla_i \nabla^i - m^2 \quad (3.1.28)$$

とできるので (∇_i は 3 次元計量での共変微分)、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} f, g\right) + \left(f, \frac{\partial}{\partial t} g\right) \\ &= i \int d^3x \sqrt{g_{(3)}} (f^* \nabla_i \nabla^i g - g \nabla_i \nabla^i f^*) \\ &= i \int d^3x \sqrt{g_{(3)}} \nabla_i (f^* \nabla^i g - g \nabla^i f^*) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

となる。よって、

$$(f, k^\mu \partial_\mu g) = -(k^\mu \partial_\mu f, g) \quad (3.1.30)$$

となり、 $k^\mu \partial_\mu$ は反エルミートであることが分かる。ゆえに、 $k^\mu \partial_\mu$ は対角化可能でその固有値は純虚数である。

3.1.3 時間依存する時空における粒子生成

$t < t_1$ では静的な時空 M_- で、 $t_1 < t < t_2$ では時間依存する時空 M_0 になり、 $t > t_2$ では再び静的な時空 M_+ になるような時空 (図 3.4) を考える。 M_+ 、 M_- においてスカラー場をそれぞれ

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_i (a_i u_i + a_i^\dagger u_i^*) \quad \text{in } M_- \\ \phi &= \sum_i (a'_i u'_i + a'^{\dagger}_i u'^*_i) \quad \text{in } M_+ \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

のように展開する。ここで、 u_i, u'_i はそれぞれ M_-, M_+ での timelike Killing ベクトルの固有関数である。 u_i と u'_i は共に解空間 \mathcal{S} の基底であるから、線形変換で結びついているはずである。それを

$$u'_i = \sum_j (A_{ij}u_j + B_{ij}u_j^*) \quad (3.1.32)$$

と書こう。このとき M_+ の領域において、

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_i (a'_i u'_i + a_i^\dagger u_i^*) \\ &= \sum_i [a'_i \sum_j (A_{ij}u_j + B_{ij}u_j^*) + a_i^\dagger \sum_j (A_{ij}^*u_j^* + B_{ij}^*u_j)] \\ &= \sum_i (a_i u_i + a_i^\dagger u_i^*) \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

となるから、

$$a_j = \sum_i (a'_i A_{ij} + a_i^\dagger B_{ij}^*) \quad (3.1.34)$$

が成り立つ。同様に

$$u_i = \sum_j (A'_{ij}u'_j + B'_{ij}u_j^*) \quad (3.1.35)$$

とおけば、

$$a'_j = \sum_i (a_i A'_{ij} + a_i^\dagger B'_{ij}^*) \quad (3.1.36)$$

となることが分かる。この変換を Bogoliubov 変換といい、 A, B を Bogoliubov 係数という。

M_- と M_+ では選んでいるモード関数が違うため真空の定義が異なっている。では、 M_- での真空は M_+ においてどのような状態に見えるのだろうか。そこで、 M_- での真空 $|\text{vac}\rangle_-$ の M_+ での個数演算子の期待値を計算してみると

$$\begin{aligned} -\langle \text{vac} | N'_i | \text{vac} \rangle_- &= -\langle \text{vac} | a_i^\dagger a'_i | \text{vac} \rangle_- \\ &= \sum_{j,k} -\langle \text{vac} | (a_k B'_{ki}) (a_j^\dagger B'_{ji}^*) | \text{vac} \rangle_- = (B'^\dagger B')_{ii} \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

となり、一般にゼロでない期待値を持つ。つまり、時空がダイナミカルに変化したことによって粒子が生成されたことを意味している。

3.1.4 重力崩壊する時空における粒子生成

これまでの議論を重力崩壊する時空 (図 3.5) に適用しよう。このときは、 $M_+ \sim \mathcal{I}^+$, $M_- \sim \mathcal{I}^-$ と対応することになる。 \mathcal{H}^+ 近傍での Klein-Gordon 方程式の解として、

$$u'_\omega = e^{-i\omega u} \quad (3.1.38)$$

が得られる。これは、Schwarzschild 時空における timelike Killing ベクトル $\partial/\partial t$ の固有関数であるので自然な基底である。ここで、図 3.5 のように \mathcal{H}^+ から affine distance ϵ のとこ

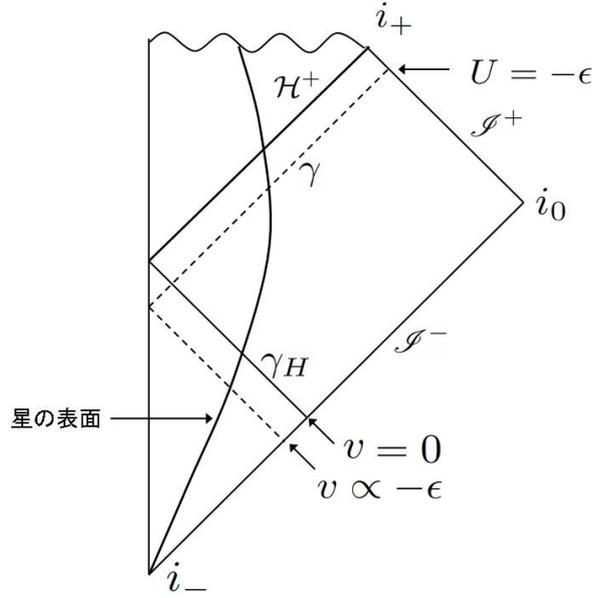


図 3.5: 星の重力崩壊

ろに直線 γ を引く。また $\epsilon = 0$ のときの直線を γ_H としよう。 U 座標の差が affine distance そのものであることがチェックできるので直線 γ は $U = -\epsilon$ である。この直線 γ は解 (3.1.38) の位相一定面であり、 γ 上での u'_ω の値は

$$u'_\omega = e^{-i\omega u} = \exp\left(\frac{i\omega}{\kappa} \ln(-U)\right) = \exp\left(\frac{i\omega}{\kappa} \ln \epsilon\right) \quad (3.1.39)$$

となる。この式から $\epsilon \rightarrow 0$ で u'_ω は速く振動することが分かる。よって幾何光学近似を使うことができる。つまり、直線 γ は、 \mathcal{S}^- 近傍でも位相一定面である。一般には \mathcal{S}^- 近傍での γ と γ_H の affine distance は ϵ から変化しているはずである。それを $c\epsilon$ とおく (本当は ϵ のある関数として $f(\epsilon)$ とおくべきだが、今 $f(0) = 0$ でしかも ϵ は十分小さいので $f(\epsilon) \simeq c\epsilon$ とおくことができる)。このとき \mathcal{S}^- 近傍で u'_ω は

$$u'_\omega = \exp\left(\frac{i\omega}{\kappa} \ln(c\epsilon)\right) \quad (3.1.40)$$

と書ける。 \mathcal{S}^- 近傍では $ds^2 = -dudv + r^2 d\Omega^2$ なので、 γ と γ_H の affine distance $\propto v$ である。よって、 $v \propto \epsilon$ である。ゆえに、 (u, v) 座標を用いると u'_ω の \mathcal{S}^- 近傍での関数形は

$$u'_\omega = \exp\left(\frac{i\omega}{\kappa} \ln(-c'v)\right) \quad (3.1.41)$$

となる。この表式は $v < 0$ のもので、 $v > 0$ においては null 線が \mathcal{S}^- まで到達しないため $u'_\omega = 0$ としよう。まとめると

$$u'_\omega = \begin{cases} 0 & (v > 0) \\ \exp\left(\frac{i\omega}{\kappa} \ln(-c'v)\right) & (v < 0) \end{cases} \quad (3.1.42)$$

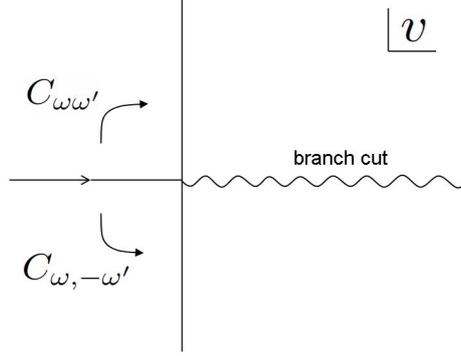


図 3.6: 積分路の変更

である。一方で \mathcal{I}^- での自然な基底は $u_\omega = e^{-i\omega v}$ である。 u_ω と u'_ω の Bogoliubov 変換を求めよう。

$$u'_\omega = \int \frac{d\omega'}{2\pi} C_{\omega\omega'} u_{\omega'} \quad (3.1.43)$$

と書くと、

$$\begin{aligned} C_{\omega\omega'} &= \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{i\omega'v} u_\omega(v) \\ &= \int_{-\infty}^0 dv \exp\left(i\omega'v + \frac{i\omega}{\kappa} \ln(-c'v)\right) \end{aligned} \quad (3.1.44)$$

となる。ここで、 $C_{\omega\omega'}$ は次の式を満たすことを示す。

$$C_{\omega, -\omega'} = -e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} C_{\omega\omega'} \quad (\text{for } \omega' > 0). \quad (3.1.45)$$

v の複素平面で、 \ln のブランチカットを正の実軸上にとろう。 $\omega' > 0$ のとき、 $C_{\omega\omega'}$ を計算するときは、積分路を $i\infty \rightarrow +i0$ に変更する。 $v = ix$ とおけば、

$$\begin{aligned} C_{\omega\omega'} &= -i \int_0^\infty dx \exp\left(-\omega'x + \frac{i\omega}{\kappa} \ln(c'xe^{-i\pi/2})\right) \\ &= -ic'^{i\omega/\kappa} \exp\left(\frac{\pi\omega}{2\kappa}\right) \int_0^\infty dx \exp\left(-\omega'x + \frac{i\omega}{\kappa} \ln(x)\right) \end{aligned} \quad (3.1.46)$$

となる。一方、 $C_{\omega, -\omega'}$ を計算するときには、積分路を $-i\infty \rightarrow -i0$ に変更しなければならない。 $v = -ix$ とおけば、

$$\begin{aligned} C_{\omega, -\omega'} &= i \int_0^\infty dx \exp\left(-\omega'x + \frac{i\omega}{\kappa} \ln(c'xe^{i\pi/2})\right) \\ &= ic'^{i\omega/\kappa} \exp\left(\frac{-\pi\omega}{2\kappa}\right) \int_0^\infty dx \exp\left(-\omega'x + \frac{i\omega}{\kappa} \ln(x)\right) \end{aligned} \quad (3.1.47)$$

となる。よって、式 (3.1.45) が成り立つことが分かる。基底の変換を式 (3.1.32) にならって

$$u'_\omega = \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} (A_{\omega\omega'} u_{\omega'} + B_{\omega\omega'} u_{\omega'}^*) \quad (3.1.48)$$

と書くと、 A, B と C の関係は、

$$\begin{aligned} A_{\omega\omega'} &= C_{\omega\omega'} \\ B_{\omega\omega'} &= C_{\omega, -\omega'} = -e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} C_{\omega\omega'} \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

である。よって、

$$B_{ij} = -e^{-\pi\omega_i/\kappa} A_{ij} \quad (3.1.50)$$

が得られる。式 (3.1.24) から、

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= (AA^\dagger - BB^\dagger)_{ij} \\ &= \sum_k (A_{ik} A_{jk}^* - B_{ik} B_{jk}^*) \\ &= (e^{\pi(\omega_i + \omega_j)/\kappa} - 1) (BB^\dagger)_{ij} \end{aligned} \quad (3.1.51)$$

となるので、 $i = j$ とおけば、

$$(BB^\dagger)_{ii} = \frac{1}{e^{2\pi\omega_i/\kappa} - 1} \quad (3.1.52)$$

が得られる。式 (3.1.23) から Bogoliubov 係数と逆 Bogoliubov 係数の関係は

$$B' = -B^T \quad (3.1.53)$$

である。よって、 \mathcal{S}^+ で生成される粒子数は式 (3.1.37) より、

$$\langle N'_i \rangle_{\mathcal{S}^+} = (B'^\dagger B')_{ii} = (B^* B^T)_{ii} = (BB^\dagger)_{ii}^* \quad (3.1.54)$$

となる。よって、式 (3.1.52) より、

$$\langle N'_i \rangle_{\mathcal{S}^+} = \frac{1}{e^{2\pi\omega_i/\kappa} - 1} \quad (3.1.55)$$

が得られる。これが、重力崩壊に伴う時空の変化によって生成される粒子分布であり、Planck 分布に他ならない。その温度は

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (3.1.56)$$

であることが読み取れる。これを Hawking 温度という。ブラックホールは古典的には物質を放出することはできないにもかかわらず、ブラックホール時空中の場の量子論を考えるとブラックホールは実は熱的な object であったことが分かる。

3.2 トレースアノマリーの方法

ここまでの議論で物質場の量子効果によりブラックホールは輻射を出すことが分かった。次は、より直接的に物質場の量子効果を見てみよう。物質場の effective action を用いることによって量子場 (つまり Hawking 輻射) のエネルギー運動量テンソルを計算する [8, 9]。この方法は一般には 2 次元時空でしか使えないが、高次元の理論が対称性により 2 次元の理論に帰着できることがしばしばあり、その場合には適用が可能である。この方法は Hawking 輻射のエネルギー運動量テンソルの全成分が決定できるため Hawking 輻射の反作用を考えたときなどに有用である。

2 次元の Schwarzschild 時空

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (3.2.1)$$

上の場の理論を考える。物質場は massless スカラー場

$$S = -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (3.2.2)$$

を考えよう。この作用は古典的には Weyl 変換 $g_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\omega(x)} g_{\mu\nu}$, $\phi \rightarrow \phi$ で不変であるが、量子論的にはこの対称性は破れてしまう。この Weyl 対称性の量子的破れをトレースアノマリーという。Weyl 対称性があるため古典的にはエネルギー運動量テンソルのトレースは 0 であるがアノマリーにより

$$T_\mu^\mu = \frac{R}{24\pi}. \quad (3.2.3)$$

となることが分かる。このトレースアノマリーからスカラー場の effective action は計算できて

$$W[g] = -\frac{1}{96\pi} \int d^2x \sqrt{-g} R \frac{1}{\square} R \quad (3.2.4)$$

となる。この作用は Liouville action と呼ばれる (トレースアノマリーと Liouville action の導出は付録 C で行っている)。Liouville action (3.2.4) には nonlocal な演算子 \square^{-1} が含まれ扱いにくいので、補助場 χ を用いて

$$W[\chi, g] = -\frac{1}{96\pi} \int d^2x \sqrt{-g} (-\chi \square \chi + 2\chi R) \quad (3.2.5)$$

と書き直す。 χ の運動方程式 $\square \chi = R$ を用いれば、式 (3.2.5) は式 (3.2.4) に戻ることが分かる。この作用から導かれるエネルギー運動量テンソルは、

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W[\chi, g]}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \frac{1}{48\pi} [\nabla_\mu \chi \nabla_\nu \chi - 2\nabla_\mu \nabla_\nu \chi + g_{\mu\nu} \{2R - \frac{1}{2}(\nabla\chi)^2\}] \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

である。 χ の運動方程式を書き下すと、

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_t^2 \chi + \partial_r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \partial_r \chi = \frac{4M}{r^3} \quad (3.2.7)$$

となり、この解として

$$\chi = at - \log\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + A(r + 2M \log(r - 2M)) + B \quad (3.2.8)$$

が得られる。ここで a, A, B は定数である。この χ を使えば、エネルギー運動量テンソルは

$$\begin{aligned} \langle T_{tt} \rangle &= \frac{1}{12\pi} \left(-\frac{2M}{r^3} + \frac{7M^2}{2r^4} \right) + \frac{1}{48\pi} \frac{A^2 + a^2}{2}, \\ \langle T_{rr} \rangle &= -\frac{1}{48\pi} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \left(\frac{2M^2}{r^4} - \frac{A^2 + a^2}{2} \right), \\ \langle T_{rt} \rangle &= \frac{1}{48\pi} \frac{Aa}{1 - \frac{2M}{r}}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

のように計算できる。あとは積分定数 a, A を決定しなければならない。そのために Unruh の vacuum condition [13] を採用しよう。つまり、ingoing flux が $r = \infty$ で消えること、自由落下する観測者が $r = 2M$ で regular なエネルギー運動量テンソルを観測することを要請する。それは

$$\begin{cases} \langle T_{vv} \rangle = 0 & (\text{at } r = \infty), \\ \langle T_{uu} \rangle = 0 & (\text{at } r = 2M), \end{cases} \quad (3.2.10)$$

と書かれる。ここで、

$$\begin{cases} u = t - r - 2M \log\left(\frac{r-2M}{2M}\right) \\ v = t + r + 2M \log\left(\frac{r-2M}{2M}\right) \end{cases} \quad (3.2.11)$$

である。この境界条件から $A = -a = 1/4M$ が得られる。よって、Hawking 輻射のエネルギー運動量テンソルは

$$\begin{aligned} \langle T_{tt} \rangle &= \frac{1}{12\pi} \left(-\frac{2M}{r^3} + \frac{7M^2}{2r^4} \right) + \frac{1}{768\pi M^2} \\ \langle T_{rr} \rangle &= -\frac{1}{48\pi} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \left(\frac{2M^2}{r^4} - \frac{1}{16M^2} \right) \\ \langle T_{rt} \rangle &= -\frac{1}{768\pi M^2} \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

となる。無限遠で $T_{uu} \rightarrow 1/196\pi M^2$ となり、外側への flux が流れ出ていることが分かる。また、 $T_{tr} \rightarrow -1/768\pi M^2$ より、Hawking 輻射の flux は $\Phi = 1/768\pi M^2$ となる。この Hawking flux の温度を決定するために、2次元の黒体輻射の flux $\Phi = \pi T^2/12$ と比較すると、 $T = 1/8\pi M = \kappa/2\pi$ となり、正しい Hawking 温度が得られることが分かる。

3.3 gravitational anomaly の方法

Hawking 輻射やブラックホールエントロピーなどのブラックホールホライズンに関する性質を理解することは量子重力理論へのヒントになると考えられている。2.3 節で説明したように、近年、ブラックホールエントロピーに関して興味深い研究がなされた [2]。ホライズ

ン上での一般座標変換不変性の破れがエントロピーの起源だという考え方である。Hawking 輻射もブラックホールエントロピーと同様にホライズンの性質によるもので、Hawking 輻射もアノマリーと関連しているのではないかと考えるのは自然なことである。

前節で (1+1) 次元 Schwarzschild 時空において Hawking 輻射がトレースアノマリーから導出できることが分かった。しかし、この方法では真空と指定するためにホライズン上だけでなく無限遠の境界条件が必要であった。そのため、Hawking 輻射がホライズンの性質であると断言することはできない。さらに、この方法は (2+1) 次元以上の時空には適用できていない。

最近 Robinson and Wilczek が gravitational anomaly を起源とした Schwarzschild ブラックホールからの Hawking 輻射の新しい導出方法を与えた [10]。この方法では Hawking 輻射はホライズン上の gravitational anomaly をキャンセルさせるための compensating flux であると解釈される。この方法は、任意の次元の Schwarzschild ブラックホールに適用でき、さらにホライズン上の情報だけを必要として、無限遠の情報を使わないということが利点として挙げられる。この gravitational anomaly による解釈が本当に正しいことを示すためには、この方法が Schwarzschild ブラックホールだけでなくほかのブラックホールに対しても適用できることを示す必要がある。Iso et al. は Reissner-Nordstrom ブラックホールからの Hawking 輻射は gravitational anomaly と $U(1)$ ゲージアノマリーをキャンセルさせるためのフラックスであると解釈できることを示した [11]。さらに彼らはホライズン上での境界条件を明確にした。

さらに、我々は Robinson and Wilczek の方法 [10] を Kerr ブラックホールと Myers-Perry ブラックホールに対しても適用できることを示した [12]。

ここでは、まず Robinson and Wilczek の方法 [10] をレビューし、次にその方法が Kerr ブラックホールに適用できることを示す。さらにそのあとに Myers-Perry ブラックホールにも拡張できることを示す。

3.3.1 Hawking 輻射と gravitational anomaly

この節では gravitational anomaly の方法 [10, 11] のレビューを行う。
次の形の計量を考えよう。

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2. \quad (3.3.1)$$

ホライズンの位置を $r = r_H$ としよう。そこでは $f(r_H) = 0$ となる。surface gravity は式 (2.1.42) より、 $\kappa = f'(r_H)/2$ と書かれる。まず、この時空上のスカラー場はホライズン近傍で 2 次元の理論に帰着できることを示そう。スカラー場の作用は

$$\begin{aligned} S[\varphi] &= \frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} \varphi \nabla^2 \varphi \\ &= \frac{1}{2} \int d^D x r^{D-2} \sqrt{\gamma} \varphi \left(-\frac{1}{f} \partial_t^2 + \frac{1}{r^{D-2}} \partial_r r^{D-2} f \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega \right) \varphi, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

である。ここで γ は $d\Omega_{D-2}^2$ の determinant で Δ_Ω は ∇^2 の角度微分の項である。ここで、

$r \rightarrow r_H$ の極限をとって dominant term だけを残すと

$$\begin{aligned} S[\varphi] &= \frac{r_H^{D-2}}{2} \int d^D x \sqrt{\gamma} \varphi \left(-\frac{1}{f} \partial_t^2 + \partial_r f \partial_r \right) \varphi \\ &= \sum_n \frac{r_H^{D-2}}{2} \int dt dr \varphi_n \left(-\frac{1}{f} \partial_t^2 + \partial_r f \partial_r \right) \varphi_n \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

となる。2 行目において φ を $(D-2)$ 次元球面調和関数で展開した。この作用は

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2. \quad (3.3.4)$$

上の無限個のスカラール場の作用の足し上げになっている。このようにして、 D 次元ブラックホール時空中のスカラール場の理論が 2 次元の理論に帰着できることが分かった。

この 2 次元の観点で、ブラックホールホライズンを時空の境界と考えよう。ホライズン近傍の ingoing mode はホライズンの外側のスカラール場のダイナミクスに影響を与えないので、ホライズンの外側だけの理論を考えるとすればこの ingoing mode は無視して良いだろう。この片方向に走る粒子しか存在しない理論をカイラルな理論という。ホライズンの外側の領域を二つに分けよう。 $r_H \leq r \leq r_H + \epsilon$ を理論がカイラルな領域、 $r_H + \epsilon \leq r$ をカイラルでない領域とする。最終的には $\epsilon \rightarrow 0$ とする。2 次元のカイラルな理論においては gravitational anomaly が存在することが知られており、そのアノマリー方程式は [14, 15, 16]

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = -\frac{1}{96\pi\sqrt{-g}} \epsilon^{\beta\delta} \partial_\delta \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\nu\beta}, \quad (3.3.5)$$

で与えられる。ここで $\epsilon^{01} = +1$ である。 A_ν と $N^\mu{}_\nu$ を次のように定義しよう。

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu \equiv A_\nu \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu N^\mu{}_\nu. \quad (3.3.6)$$

$r_H + \epsilon \leq r$ の領域では、 $A_\nu = N^\mu{}_\nu = 0$ であるが、 $r_H \leq r \leq r_H + \epsilon$ の領域では、

$$\begin{aligned} N^t{}_t &= N^r{}_r = 0, \\ N^r{}_t &= -\frac{1}{192\pi} (f'^2 + f''f), \\ N^t{}_r &= -\frac{1}{192\pi f^2} (f'^2 - f''f), \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$$\begin{aligned} A_t &= -\frac{1}{192\pi} (f'^2 + f''f)', \\ A_r &= 0, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

となる。ここで $' \equiv \partial_r$ である。スカラール場を経路積分して得られる effective action は

$$W[g_{\mu\nu}] = -i \ln \left(\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi, g_{\mu\nu}]} \right) \quad (3.3.9)$$

である。ここで $S[\phi, g_{\mu\nu}]$ は古典作用である。無限小一般座標変換

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu - \lambda^\mu \quad (3.3.10)$$

を effective action に行うと、

$$\begin{aligned}
-\delta_\lambda W &= \int d^2x \sqrt{-g} \lambda^\nu \nabla_\mu \{T_{(H)}{}^\mu{}_\nu H(r) + T_{(o)}{}^\mu{}_\nu \Theta_+(r)\} \\
&= \int d^2x \lambda^t \{\partial_r(N^r{}_t H) + (T_{(o)}{}^r{}_t - T_{(H)}{}^r{}_t + N^r{}_t) \delta(r - r_H - \epsilon)\} \\
&\quad + \int d^2x \lambda^r (T_{(o)}{}^r{}_r - T_{(H)}{}^r{}_r) \delta(r - r_H - \epsilon),
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

となる。ここで $\Theta_+(r) = \Theta(r - r_H - \epsilon)$, $H(r) = 1 - \Theta_+(r)$ である。添え字の H と o はそれぞれ $r_H \leq r \leq r_H + \epsilon$, $r_H + \epsilon \leq r$ での値であることを表している。上の最終表式を得るために $T_{(o)}{}^\mu{}_\nu$ は保存し、 $T_{(H)}{}^\mu{}_\nu$ はアノマリー方程式 (3.3.5) に従うことを用いた。 $T_{(H)}{}^\mu{}_\nu$ と $T_{(o)}{}^\mu{}_\nu$ が時間に依らないことを考慮に入れると式 (3.3.6) は積分できてしまって、

$$\begin{aligned}
T^t{}_t &= -\frac{K+Q}{f} - \frac{B(r)}{f} - \frac{I(r)}{f} + T^\alpha{}_\alpha(r), \\
T^r{}_r &= \frac{K+Q}{f} + \frac{B(r)}{f} + \frac{I(r)}{f}, \\
T^r{}_t &= -K + C(r) = -f^2 T^t{}_r,
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

となる [17]。ここで T は $T_{(H)}$ もしくは $T_{(o)}$ を表している。また、

$$\begin{aligned}
C(r) &\equiv \int_{r_H}^r A_t(r') dr', \\
B(r) &\equiv \int_{r_H}^r f(r') A_r(r') dr', \\
I(r) &\equiv \frac{1}{2} \int_{r_H}^r T^\alpha{}_\alpha(r') f'(r') dr',
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

であり K と Q は積分定数である。この定数を $r_H \leq r \leq r_H + \epsilon$ では K_H, Q_H , $r_H + \epsilon \leq r$ では K_o, Q_o と表すことにする。式 (3.3.8) から $B(r) = 0$ である。さらに $r \rightarrow r_H$ の極限では、 $C(r) \rightarrow 0$, $I(r)/f \rightarrow \frac{1}{2} T^\alpha{}_\alpha(r_H)$ となるので式 (3.3.12) はこの極限で

$$\begin{aligned}
T^t{}_t &= -\frac{K+Q}{f} + \frac{1}{2} T^\alpha{}_\alpha(r), \\
T^r{}_r &= \frac{K+Q}{f} + \frac{1}{2} T^\alpha{}_\alpha(r), \\
T^r{}_t &= -K = -f^2 T^t{}_r.
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

となる。4つの定数 K_H, K_o, Q_H, Q_o は gravitational anomaly が消えるという条件から決める。式 (3.3.14) を式 (3.3.11) 代入して $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\begin{aligned}
-\delta_\lambda W &= \int d^2x \lambda^t \{\partial_r(N^r{}_t H) + (-K_H + K_o + N^r{}_t) \delta(r - r_H)\} \\
&\quad + \int d^2x \lambda^r \frac{K_H + Q_H - K_o - Q_o}{f} \delta(r - r_H).
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

が得られる。一般座標変換不変性を保つためには、上の変分は消えなければならない。第1項目は δ 関数の項によって消すことはできないので、ingoing modeの量子効果で消えているはずである。よって第1項目は無視しよう。第2項目と3項目が消えるという条件から

$$\begin{aligned} K_o &= K_H - \Phi, \\ Q_o &= Q_H + \Phi, \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

が得られる。ここで

$$\Phi \equiv \frac{f'^2}{192\pi} \Big|_{r=r_H} = \frac{\kappa^2}{48\pi}. \quad (3.3.17)$$

である。Hawking fluxを決定するためには K_H を決めなければならない。そのために[11]で提案された境界条件を用いる。covariant energy momentum tensor $\tilde{T}_{\mu\nu}$ を導入しよう。それは次のcovariant anomaly equationを満たすものとして定義される。

$$\nabla_\mu \tilde{T}_\nu^\mu = \frac{1}{96\pi\sqrt{-g}} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\mu R. \quad (3.3.18)$$

境界条件は diffeomorphism invariant であるべきなので、この covariant anomalous energy momentum tensor $\tilde{T}_{(H)}^{\mu\nu}$ に境界条件を課そう。その境界条件は

$$\tilde{T}_{(H)}^r{}_t = T_{(H)}^r{}_t - \frac{1}{192\pi} (ff'' - 2f'^2) = 0. \quad (3.3.19)$$

である。ここから $K_H = 2\Phi$ が得られ

$$T_{(o)}^r{}_t = -\Phi. \quad (3.3.20)$$

となる。ここから Φ がHawking放射のfluxであることが分かる。一方、2次元時空における黒体放射のfluxは $\Phi = \frac{\pi}{12} T^2$ である。これと式(3.3.17)を比較すると正しいHawking温度

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (3.3.21)$$

が得られる。この手法をより現実的な回転するブラックホールに拡張することは重要である。

3.3.2 Kerr ブラックホールからの Hawking 放射

次は、Kerr ブラックホールからの Hawking 放射も gravitational anomaly の cancellation の観点から理解できることを示す。ポイントは Kerr 時空においてもスカラー場の理論がホライズン近傍で2次元に落とせるという点である。Kerr 時空は球対称でないためこれは自明ではない。

Boyer-Linquist 座標で Kerr 計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - 2a \sin^2 \theta \frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma} dt d\phi \\ &+ \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

と書ける。ここで、

$$\begin{aligned}\Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta , \\ \Delta &= r^2 - 2Mr + a^2 \\ &= (r - r_+)(r - r_-) .\end{aligned}\tag{3.3.23}$$

である。outer horizon と inner horizon はそれぞれ $r = r_+, r_-$ にあるとする。この計量の determinant は

$$\sqrt{-g} = \Sigma \sin \theta \tag{3.3.24}$$

で、計量の逆行列はの (t, ϕ) 成分は

$$\begin{aligned}g^{tt} &= -\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta} , \\ g^{\phi\phi} &= \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta \sin^2 \theta} , \\ g^{t\phi} &= -\frac{a(r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma \Delta} .\end{aligned}\tag{3.3.25}$$

である。Kerr 時空上のスカラー場の作用は

$$\begin{aligned}S[\varphi] &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \varphi \nabla^2 \varphi \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \varphi \frac{1}{\Sigma} \left[-\left(\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right) \partial_t^2 - \frac{2a(r^2 + a^2 - \Delta)}{\Delta} \partial_t \partial_\phi \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{a^2}{\Delta} \right) \partial_\phi^2 + \partial_r \Delta \partial_r + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta \right] \varphi\end{aligned}\tag{3.3.26}$$

となる。 $r \rightarrow r_+$ の極限をとって dominant term を残すと、

$$S[\varphi] = \frac{1}{2} \int d^4x \sin \theta \varphi \left[-\frac{(r_+^2 + a^2)^2}{\Delta} \partial_t^2 - \frac{2a(r_+^2 + a^2)}{\Delta} \partial_t \partial_\phi - \frac{a^2}{\Delta} \partial_\phi^2 + \partial_r \Delta \partial_r \right] \varphi . \tag{3.3.27}$$

となる。ここで、局所的に無回転な座標系、つまり

$$\begin{cases} \psi = \phi - \Omega_H t , \\ \xi = t , \end{cases}\tag{3.3.28}$$

に変換する。ここで

$$\Omega_H \equiv \frac{a}{r_+^2 + a^2}\tag{3.3.29}$$

である。この (ξ, r, θ, ψ) 座標を使うと作用 (3.3.27) を

$$S[\varphi] = \frac{a}{2\Omega_H} \int d^4x \sin \theta \varphi \left(-\frac{1}{f(r)} \partial_\xi^2 + \partial_r f(r) \partial_r \right) \varphi , \tag{3.3.30}$$

と書き直すことができる。ここで

$$f(r) \equiv \frac{\Omega_H \Delta}{a}\tag{3.3.31}$$

である。ここで、角度微分が完全に消えてしまったことが分かる。さらに球面調和関数で $\varphi(x) = \sum_{l,m} \varphi_{lm}(\xi, r) Y_{lm}(\theta, \psi)$ のように展開すると、次の2次元の作用が得られる。

$$S[\varphi] = \frac{a}{\Omega_H} \sum_{l,m} \frac{1}{2} \int d\xi dr \varphi_{lm} \left(-\frac{1}{f(r)} \partial_\xi^2 + \partial_r f(r) \partial_r \right) \varphi_{lm} . \quad (3.3.32)$$

effective 2次元計量は上の作用から読み取れて、

$$ds^2 = -f(r) d\xi^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 \quad (3.3.33)$$

である。このようにして、4次元の理論が2次元の理論に落とせることが分かった。この2次元計量のホライズン近傍の geometry は $r_+ > r_-$ のとき Rindler 時空であり、extremal な場合の $r_+ = r_-$ のときは AdS₂ になることが分かる。この結果は [18] の結果と consistent である。さて、Kerr ブラックホールの Hawking 温度を求めよう。ここまで来れば 3.3 節の方法がそのまま応用できる。anomaly cancellation の議論から得られる Hawking 温度は式 (3.3.21) より

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4\pi} \partial_r f|_{r_+} \\ &= \frac{r_+^2 - a^2}{4\pi r_+(r_+^2 + a^2)} = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{4\pi M(M + \sqrt{M^2 - a^2})} . \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

となる。これは Kerr ブラックホールの Hawking 温度である。我々は輻射のエネルギー分布が Planck 分布であることは示していないが、それを仮定してしまおう。4次元理論の観点では、 (ξ, ψ) で見るとホライズン近傍で分布関数は $(\exp(\omega/T) - 1)^{-1}$ である。この座標系でエネルギー ω 、磁気量子数 m のスカラー場は $\varphi \propto \exp(i\omega\xi + im\psi)$ と書ける。 (t, ϕ) 座標では、 $\varphi \propto \exp(i(\omega - m\Omega_H)t + im\phi)$ となる。よって、 (t, ϕ) 座標では分布関数は、

$$\frac{1}{\exp((\omega - m\Omega_H)/T) - 1} \quad (3.3.35)$$

となる。この式から、Kerr ブラックホールの正しい化学ポテンシャルも得られることが分かる。この表式を用いれば、角運動量 flux を計算することもできる。電荷 Q 、磁荷 P を持つ Kerr-Newman ブラックホールに関しては、中性のスカラー場の Hawking 輻射は $a^2 \rightarrow a^2 + Q^2 + P^2$ の置き換えにより同様に計算できる。

3.3.3 Myers-Perry ブラックホールの場合

前節の議論は回転軸が1つの Myers-Perry ブラックホールにも拡張できる。 D 次元の Myers-Perry 計量は [19, 20]

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + \frac{U dr^2}{V - 2M} + \frac{2M}{U} \left(dt + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i^2 d\phi_i \right)^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (r^2 + a_i^2) (\mu_i^2 d\phi_i^2 + d\mu_i^2) + \epsilon r^2 d\mu_{n+\epsilon}^2 \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

である。ここで、

$$V = r^{\epsilon-2} \prod_{i=1}^n (r^2 + a_i^2), \quad (3.3.37)$$

$$U = V \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 \mu_i^2}{r^2 + a_i^2} \right),$$

であり、 n は $(D-1)/2$ の整数部分で、 $\epsilon = 1(D:\text{even}), 0(D:\text{odd})$ である。 μ_i 座標は独立ではなく、次の方程式に従う。

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^2 + \epsilon \mu_{n+\epsilon}^2 = 1. \quad (3.3.38)$$

回転軸が1つの Myers-Perry ブラックホールを考えよう。 $a_1 = a, a_i = 0$ (for $i \neq 1$), $\mu_1 = \mu, \phi_1 = \phi$ とおく。さらに極座標

$$\begin{aligned} \mu &= \cos \theta, \\ \mu_2 &= \sin \theta \cos \theta_2, \\ \mu_3 &= \sin \theta \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

を用いると、計量は、

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(-1 + \frac{2M}{U} \right) dt^2 + \mu^2 \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2\mu^2}{U} \right) d\phi^2 \\ &+ \frac{4Ma\mu^2}{U} dt d\phi + \frac{U dr^2}{V-2M} + \frac{(r^2+a^2)U}{V} d\theta^2 + r^2 d\gamma^2 \end{aligned} \quad (3.3.40)$$

のように書ける。ここで

$$d\gamma^2 \equiv \sin^2 \theta d\Omega_{n+\epsilon-2}^2 + (\mu_2^2 d\phi_2^2 + \cdots + \mu_n^2 d\phi_n^2) \quad (3.3.41)$$

であり、 $d\Omega_{n+\epsilon-2}^2$ は $S^{n+\epsilon-2}$ の $(\theta_2, \dots, \theta_{n+\epsilon-1})$ 座標での計量である。計量の逆行列の (t, ϕ) 成分は

$$\begin{aligned} g^{tt} &= -\frac{V\{(r^2+a^2)U + 2a^2\mu^2M\}}{(r^2+a^2)(V-2M)U}, \\ g^{\phi\phi} &= \frac{(U-2M)V}{\mu^2(r^2+a^2)(V-2M)U}, \\ g^{t\phi} &= \frac{2aMV}{(r^2+a^2)(V-2M)U}, \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

で、計量の determinant は

$$\sqrt{-g} = \frac{\mu(r^2+a^2)U}{V} r^{D-4} \sqrt{\gamma}. \quad (3.3.43)$$

である。ホライズンの位置は $V(r=r_+) = 2M$ で決定される $r=r_+$ である。計量の (t, r, ϕ) 成分と $(\theta, \theta_2, \dots, \theta_{n+\epsilon-1}, \phi_2, \dots, \phi_n)$ 成分は分離している。さらに逆行列の $(\theta, \theta_2, \dots,$

$\theta_{n+\epsilon-1}, \phi_2, \dots, \phi_n$) 成分はホライズン上で正則であるので、スカラー場の作用の中でそのパートはホライズン近傍で無視できる。よって、ホライズン近傍でのスカラー場の作用は

$$\begin{aligned} S[\varphi] &= \frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} \varphi \nabla^2 \varphi \\ &= \frac{1}{2} \int d^D x r_+^{D-4} \sqrt{\gamma} \mu (r_+^2 + a^2) \varphi \left[-\frac{2M}{V-2M} \left(\partial_t - \frac{a}{r_+^2 + a^2} \partial_\phi \right)^2 \partial_r \frac{V-2M}{2M} \partial_r \right] \varphi \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

となる。さらに、座標変換

$$\begin{cases} \psi = \phi + \frac{a}{r_+^2 + a^2} t, \\ \xi = t. \end{cases} \quad (3.3.45)$$

をすると、

$$\begin{aligned} S[\varphi] &= \frac{(r_+^2 + a^2)r_+^{D-4}}{2} \int d^D x \sqrt{\gamma} \mu \varphi \left(-\frac{1}{f} \partial_\xi^2 + \partial_r f \partial_r \right) \varphi \\ &= \frac{(r_+^2 + a^2)r_+^{D-4}}{2} \sum_n \int d\xi dr \varphi_n \left(-\frac{1}{f} \partial_\xi^2 + \partial_r f \partial_r \right) \varphi_n \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

が得られる。ここで

$$f(r) = \frac{V-2M}{2M} \quad (3.3.47)$$

である。最後の行では $\sqrt{\gamma} \mu$ を測度とした $(\theta, \theta_2, \dots, \theta_{n+\epsilon-1}, \psi, \phi_2, \dots, \phi_n)$ の関数の正規直交系で φ を展開した。式 (3.3.46) は 2 次元計量

$$ds^2 = -f(r) d\xi^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 \quad (3.3.48)$$

上の無限個のスカラー場を作用の足し上げたものがある。3.3 節の方法を使えば、Myers-Perry ブラックホールの正しい Hawking 温度

$$T = \frac{V'(r_+)}{8\pi M} = \frac{(D-3)r_+^2 + (D-5)a^2}{4\pi r_+(r_+^2 + a^2)} \quad (3.3.49)$$

が得られる。

我々はこのようにして Kerr, Myers-Perry ブラックホールからの Hawking 温度を gravitational anomaly の観点から導出し、gravitational anomaly の方法の普遍性を確認することができた。Kerr ブラックホールへの拡張は我々の研究と同時期に異なる方法でも示されている [21]。また、Myers-Perry ブラックホールの回転軸が 2 つ以上の場合に拡張できることは、ごく最近 [22, 23, 24] で示された。さらに、他の様々なブラックホールへの拡張も多くなされている [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28]。

この研究の future work として、さらに他のブラックホールに拡張する、という方向性もあるが、そろそろ次の段階に移るべきである。我々は、最近のブラックホールエントロピーの研究のいくつかはアノマリーと関連していることに注目している [2, 17, 29, 30]。これらの研究と統合することにより、ブラックホールエントロピーと Hawking 輻射がアノマリーの観点から統一的理解ができるかもしれない。さらに、Hawking 輻射の反作用を gravitational anomaly の方法に組み込むことも考えられる。これに関しては 4.4 節で少し述べることにする。

第4章 Hawking 輻射の反作用

前章でブラックホールは熱的な輻射を出すことが分かった。その議論では、背景時空は固定されていると考えて Hawking 輻射の背景時空への反作用を無視して考えていた。しかし、蒸発によりブラックホール質量が Planck 質量程度になると Hawking 輻射の反作用が効いて来るため、ブラックホール蒸発の最終段階を議論するためには、輻射反作用を考慮したダイナミカルな扱いが必要になる。また、Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発を調べるときも、Hawking 輻射の反作用が内部空間のダイナミクスを引き起こすことになる。

この章では、まず4次元時空において準静的に Hawking 輻射の反作用を取り入れた議論を行う。また、ダイナミカルに反作用を取り入れる方法とその難しさについて述べる。次に、2次元重力モデルを考え、2次元ブラックホールの蒸発過程を調べる。2次元ブラックホールにおいては Hawking 輻射の反作用を取り入れても厳密に解けることが分かる。後の Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発を調べる際にも高次元の理論に対称性を課して2次元の理論に落としてから解析することができる。そのためにも、今2次元重力モデルについて調べておくことは有益である。

4.1 4次元時空における Hawking 輻射の反作用

ブラックホールは Hawking 温度 $T = \kappa/2\pi$ の熱的な輻射をすることが前章で分かった。この輻射のエネルギーは自らの質量を失うことによって放出されているはずである。この効果を準静的に見てみよう。ブラックホールの質量損失率は、Stephan-Boltzmann の法則より

$$\frac{dM}{dt} = -\sigma AT_H^4 \quad (\sigma = \frac{\pi^2}{60}) \quad (4.1.1)$$

となる。ここで A はホライズン面積である。 $A = M^2/M_{\text{Pl}}^4$, $T_H \sim M_{\text{Pl}}^2/M$ を代入すれば、

$$\frac{dM}{dt} \sim -\frac{M_{\text{Pl}}^4}{M^2} \quad (4.1.2)$$

となり、ここから寿命

$$\tau \sim \frac{M^3}{M_{\text{Pl}}^4} \quad (4.1.3)$$

が見積もれる。

しかし、この議論は質量が十分大きいとき ($M \gg M_{\text{Pl}}$) にしか成り立たないことに注意すべきである。なぜなら Hawking 温度 (3.1.56) は質量が小さいほど大きく、特に Planck 質量のときは Planck 温度になる。このときは、Hawking 輻射の背景時空への反作用が効いてくるので、ここまで行なってきた背景時空を固定した議論はもはや成り立たなくなる。さらに Planck スケールの物理では、量子重力効果が効いてくるはずでその効果も取り入れなければ

ばならない。では、反作用を取り入れた計算はどのように行えば良いのだろうか。原理的には、重力 + 物質場の作用

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} (\nabla f)^2 \right] \quad (4.1.4)$$

を考えて、物質場だけを量子的に扱えば良い。つまり、物質場の古典作用の代わりに effective action

$$W[g] = -i \ln \left(\int \mathcal{D}f \exp(i \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} (\nabla f)^2 \right]) \right) \quad (4.1.5)$$

を用いて、

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + W[g] \quad (4.1.6)$$

の理論を調べれば良い。\$W[g]\$ が Hawking 輻射の作用である。この作用から導かれる半古典的 Einstein 方程式

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \langle T_{\mu\nu} \rangle, \quad \langle T_{\mu\nu} \rangle \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (4.1.7)$$

を解けば、Hawking 輻射の反作用を取り入れた時空のダイナミクスが分かる。しかし、この計算で難しいのは 4 次元の曲がった時空中における物質場の effective action の計算である。4 次元時空においては、2 次元のときのような簡単な effective action の表式 (3.2.4) は知られていない。仮にこれが求められたとしても、半古典 Einstein 方程式においてブラックホールが痩せていくようなダイナミカルな解を求めるのは難しいであろう。しかし、2 次元時空で考えれば、effective action は簡単な表式 (3.2.4) で与えられるし、それから導かれる半古典運動方程式は厳密に解くことができることがわかる。次節から実際に 2 次元重力におけるブラックホールについて考えていく。

4.2 CGHS モデル

2 次元時空における Einstein-Hilbert 作用 $\int d^2x \sqrt{-g} R$ は、オイラー数であり時空のトポロジ的な性質のみで決まってしまう。そのため、Einstein-Hilbert 作用では意味のある重力理論にはならない。実際、2 次元では Einstein テンソルは恒等的に 0 になってしまう。場として計量 $g_{\mu\nu}$ だけでは、2 次元では自由度が -1 になってしまうので、意味のある重力理論を作るためにはほかに場を導入する必要がある。ここで考える 2 次元の重力モデルは、dilaton ϕ を導入して、

$$S_{\text{CGHS}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \sqrt{-g} \left[e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2 + 4\lambda^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\nabla f_i)^2 \right] \quad (4.2.1)$$

である。 f_i は物質場である。また、 λ は mass 次元を持つパラメータである。このモデルは、Callan, Giddings, Harvey, Strominger によって調べられ、CGHS モデルと呼ばれる [31]。この dilaton gravity は、2.3.1 節でも見たように、高次元の Einstein-Hilbert 作用に球対称性を課して dimensional reduction するとしばしば現れる。あとで量子化された f_i が Hawking 輻射を生み出すことが分かるが、反作用の効果を見るためにまず f_i を古典的に考えて、そ

の結果と量子的に考えた結果を比較することにする。この作用から導かれる運動方程式は、

$$2e^{-2\phi}(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \nabla^2 \phi + g_{\mu\nu} (\nabla \phi)^2 - \lambda^2 g_{\mu\nu}) + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (\nabla f_i)^2 - \frac{1}{2} \nabla_\mu f_i \nabla_\nu f_i = 0, \quad (4.2.2)$$

$$R - 4(\nabla \phi)^2 + 4\nabla^2 \phi + 4\lambda^2 = 0, \quad (4.2.3)$$

$$\nabla^2 f_i = 0 \quad (4.2.4)$$

である。 f_i が2回出てくるタームは i について和をとることを約束しておく。この運動方程式における物質場が重力崩壊する解を求めよう。計量は一般座標変換を使って

$$ds^2 = -e^{2\rho} dx^+ dx^- \quad (4.2.5)$$

の形にとる (conformal gauge)。このゲージ固定では、まだ $x^+ \rightarrow x^{+'}(x^+)$, $x^- \rightarrow x^{-'}(x^-)$ のゲージ自由度が残っている。なぜなら、この変換をしても

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2\rho} \frac{dx^+}{dx^{+'}} \frac{dx^-}{dx^{-'}} dx^{+'} dx^{-'} \\ &= -\exp\left(2\rho + \ln \frac{dx^+}{dx^{+'}} + \ln \frac{dx^-}{dx^{-'}}\right) dx^{+'} dx^{-'} \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

となり、conformal gauge の形が保たれるからである。この残ったゲージ自由度を用いれば、

$$\rho \rightarrow \rho + (x^+ \text{のみの関数}) + (x^- \text{のみの関数}) \quad (4.2.7)$$

とできることも分かる。conformal gauge 条件のもとでは、運動方程式は

$$e^{-2\phi}(4\partial_+ \rho \partial_+ \phi - 2\partial_+^2 \phi) + \frac{1}{2} \partial_+ f_i \partial_+ f_i = 0, \quad (4.2.8)$$

$$e^{-2\phi}(4\partial_- \rho \partial_- \phi - 2\partial_-^2 \phi) + \frac{1}{2} \partial_- f_i \partial_- f_i = 0, \quad (4.2.9)$$

$$e^{-2\phi}(2\partial_+ \partial_- \phi - 4\partial_+ \phi \partial_- \phi - \lambda^2 e^{2\rho}) = 0, \quad (4.2.10)$$

$$-4\partial_+ \partial_- \phi + 4\partial_+ \phi \partial_- \phi + 2\partial_+ \partial_- \rho + \lambda^2 e^{2\rho} = 0, \quad (4.2.11)$$

$$\partial_+ \partial_- f_i = 0 \quad (4.2.12)$$

と書ける。式(4.2.10),(4.2.11)より、

$$\partial_+ \partial_- (\rho - \phi) = 0 \quad (4.2.13)$$

が得られる。つまり $\rho = \phi + (x^+ \text{のみの関数}) + (x^- \text{のみの関数})$ であるので、残ったゲージ自由度を用いて、

$$\rho = \phi \quad (4.2.14)$$

とする。まだ、 x^\pm を定数だけずらすゲージ自由度は残っていることに留意しておく。式(4.2.14)を用いれば、式(4.2.10)は、

$$\begin{aligned} \partial_+ \partial_- e^{-2\phi} &= -\lambda^2 \\ \Rightarrow e^{-2\phi} &= -\lambda^2 x^+ x^- + A(x^+) + B(x^-) \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

となる。物質場 f_i としては、ingoing shock wave を考える。つまり、

$$\begin{aligned}\partial_+ f_i \partial_+ f_i &= 2a\delta(x^+ - x_0^+) \\ \partial_- f_i &= 0\end{aligned}\tag{4.2.16}$$

とする。この仮定は式 (4.2.12) と consistent である。このとき、式 (4.2.8) は、

$$\begin{aligned}\partial_+^2 e^{-2\phi} &= -a\delta(x^+ - x_0^+) \\ \Rightarrow A''(x^+) &= -a\delta(x^+ - x_0^+) \quad (\because (4.2.15)) \\ \Rightarrow A(x^+) &= -a(x^+ - x_0^+)\theta(x^+ - x_0^+) + c_1 x^+ + c_3,\end{aligned}\tag{4.2.17}$$

式 (4.2.9) は、

$$\begin{aligned}\partial_-^2 e^{-2\phi} &= 0 \\ \Rightarrow B''(x^-) &= 0 \quad (\because (4.2.15)) \\ \Rightarrow B(x^-) &= c_2 x^- + c_4,\end{aligned}\tag{4.2.18}$$

となる。よって、

$$e^{-2\phi} = -a(x^+ - x_0^+)\theta(x^+ - x_0^+) - \lambda^2 x^+ x^- + c_1 x^+ + c_2 x^- + c\tag{4.2.19}$$

が得られる。さらに、 x^\pm を定数ずらす自由度を用いれば、 $c_1 = c_2 = 0$ とできる (このとき x_0^+ も再定義してやる必要がある)。これで、ゲージ自由度は完全に使い尽くしたことになる。最終的に得られた解は、

$$e^{-2\phi} = e^{-2\rho} = -a(x^+ - x_0^+)\theta(x^+ - x_0^+) - \lambda^2 x^+ x^- + c\tag{4.2.20}$$

である。 $c = 0$ のときを考えてみると、shock wave が入射する前 $x^+ < x_0^+$ では、

$$\begin{aligned}ds^2 &= -\frac{dx^+ dx^-}{\lambda^2 x^+ x^-} = -d\sigma^+ d\sigma^- \\ &\begin{cases} \lambda x^+ = e^{\lambda\sigma^+} \\ \lambda x^- = -e^{\lambda\sigma^-} \end{cases}\end{aligned}\tag{4.2.21}$$

となり、平坦な時空であることが分かる。我々が考えたいのは、平坦な空間に shock wave が入射してきてブラックホールができるような状況であるので $c = 0$ とする。

次にこの計量

$$ds^2 = \frac{dx^+ dx^-}{-a(x^+ - x_0^+)\theta(x^+ - x_0^+) - \lambda^2 x^+ x^-}\tag{4.2.22}$$

の時空構造を調べてみよう。 $x^+ > x_0^+$ において、リッチスカラーを計算すると

$$\begin{aligned}R &= 8e^{-2\rho} \partial_+ \partial_- \rho \\ &= \frac{-4\lambda^2 a x_0^+}{a(x^+ - x_0^+) + \lambda^2 x^+ x^-}\end{aligned}\tag{4.2.23}$$

となる。この式から、曲線

$$x^+(x^- + \frac{a}{\lambda^2}) = \frac{ax_0^+}{\lambda^2}\tag{4.2.24}$$

が curvature singularity であることが分かる。よって、この時空構造は図 4.1 のようになる。さらに conformal 変換をして Penrose 図を描くと図 4.2 のようになる。

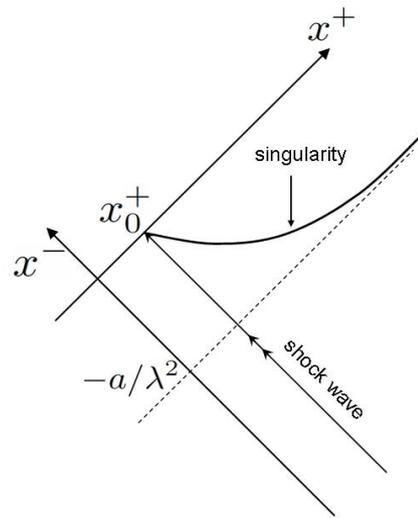


図 4.1: 平坦な時空に shock wave が入射してきたときの時空図 (Hawking 輻射なし)

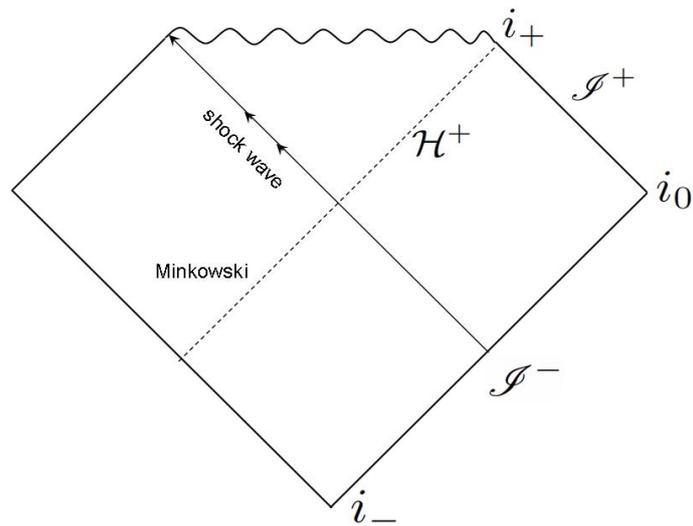


図 4.2: CGHS モデルの Penrose 図

4.3 RST モデル

CGHS モデルでは、物質場を古典場として扱っていた。次は、物質場の量子補正を考慮しよう。まず、物質場を

$$f_i \rightarrow f_i + \delta f_i \quad (4.3.1)$$

のように classical part f_i と quantum part δf_i に分ける。このとき CGHS モデルの作用は、

$$S_{\text{CGHS}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \sqrt{-g} [e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2 + 4\lambda^2) - \frac{1}{2}(\nabla f_i)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \delta f_i)^2] \quad (4.3.2)$$

と書ける (δf_i の 1 次のタームは運動方程式により消えることに注意)。quantum part δf_i についてだけ、経路積分を行うことにより、次の effective action が得られる。

$$\begin{aligned} S_{\text{RST}} &= -i \ln \int \prod_{i=1}^N \mathcal{D}\delta f_i \exp(i S_{\text{CGHS}}[g, \phi, f_i + \delta f_i]) \\ &= S_{\text{CGHS}} - \frac{\kappa}{8\pi} \int d^2x \sqrt{-g} (R \frac{1}{\square} R + 2\phi R). \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

ここで、 $\kappa \equiv N/12$ である。この経路積分の計算は付録 C で行っている。このモデルは、Russo, Susskind, Thorlacius によって調べられており、RST モデルと呼ばれている [32]。この作用の $R \square^{-1} R$ のタームは Liouville action である。付録 C で述べているように、上の経路積分の計算の際には、local counter term を付け加える不定性がでてくる。 $2\phi R$ のタームは、その不定性を用いて手で入れたタームである。このタームを手で入れておくことによつて、Hawking 輻射の反作用を入れても運動方程式が solvable になる。solvable になるような local counter term の入れ方は一意ではないが、他の場合でも解の定性的な性質は変わらないことが分かっている [33, 34]。

RST モデル (4.3.3) は、nonlocal な演算子が含まれているためやや扱いにくい。そこで、補助場 χ を用いて式 (4.3.3) を次のように変形しておく。

$$S_{\text{RST}} = S_{\text{CGHS}} - \frac{\kappa}{8\pi} \int d^2x \sqrt{-g} [(\nabla\chi)^2 + 2(\chi + \phi)R]. \quad (4.3.4)$$

χ の運動方程式 $\nabla^2 \chi = R$ を式 (4.3.4) に代入すれば、式 (4.3.3) に戻ることが分かる。

このモデルで物質場が重力崩壊する解を求めよう。運動方程式は、

$$\begin{aligned} &2(e^{-2\phi} + \frac{\kappa}{4})(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \nabla^2 \phi) \\ &+ 2e^{-2\phi} g_{\mu\nu} \{(\nabla\phi)^2 - \lambda^2\} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (\nabla f_i)^2 - \frac{1}{2} \nabla_\mu f_i \nabla_\nu f_i \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

$$\begin{aligned} &-\frac{\kappa}{4} (\nabla_\mu \chi \nabla_\nu \chi - 2\nabla_\mu \nabla_\nu \chi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla\chi)^2 + 2g_{\mu\nu} \nabla^2 \chi) = 0, \\ &(1 + \frac{\kappa}{4} e^{2\phi})R - 4(\nabla\phi)^2 + 4\nabla^2 \phi + 4\lambda^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

$$\nabla^2 f_i = 0, \quad (4.3.7)$$

$$\nabla^2 \chi = R. \quad (4.3.8)$$

である。CGHS モデルと同様に、conformal gauge

$$ds^2 = -e^{2\rho} dx^+ dx^- \quad (4.3.9)$$

をとろう。このとき式(4.3.8)は、

$$\begin{aligned}\partial_+\partial_-\chi &= -2\partial_+\partial_-\rho \\ \Rightarrow \chi &= -2(\rho + A_+(x^+) + A_-(x^-))\end{aligned}\quad (4.3.10)$$

となる。これを用いると、式(4.3.5)の(+−)成分と式(4.3.6)は、

$$-2\left(e^{-2\phi} + \frac{\kappa}{4}\right)\partial_+\partial_-\phi + 4e^{-2\phi}\partial_+\phi\partial_-\phi + \lambda^2 e^{2(\rho-\phi)} + \kappa\partial_+\partial_-\rho = 0 \quad (4.3.11)$$

$$2\left(e^{-2\phi} + \frac{\kappa}{4}\right)\partial_+\partial_-\rho + 4e^{-2\phi}\partial_+\phi\partial_-\phi - 4e^{-2\phi}\partial_+\partial_-\phi + \lambda^2 e^{2(\rho-\phi)} = 0 \quad (4.3.12)$$

となる。この2式の差をとると、

$$\partial_+\partial_-(\rho - \phi) = 0 \quad (4.3.13)$$

が得られる。よって、CGHSモデルのときと同様に残ったゲージ自由度を使えば $\rho = \phi$ とすることができる。このとき式(4.3.11)は、

$$\begin{aligned}-2\left(e^{-2\phi} - \frac{\kappa}{4}\right)\partial_+\partial_-\phi + 4e^{-2\phi}\partial_+\phi\partial_-\phi + \lambda^2 \\ \Rightarrow \sqrt{\kappa}\partial_+\partial_-\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{2}\phi + \frac{e^{-2\phi}}{\sqrt{\kappa}}\right) + \lambda^2 = 0\end{aligned}\quad (4.3.14)$$

$$\Rightarrow \Omega \equiv \frac{\sqrt{\kappa}}{2}\phi + \frac{e^{-2\phi}}{\sqrt{\kappa}} = -\frac{\lambda^2}{\sqrt{\kappa}}x^+x^- + B_+(x^+) + B_-(x^-)$$

となる。ここで、

$$B_+(x^+) + B_-(x^-) = -\frac{\sqrt{\kappa}}{4}\ln(-\lambda^2x^+x^-) \quad (4.3.15)$$

のとき、時空は平坦になることに留意しておこう。さらに、式(4.3.5)の(±±)成分は、

$$\begin{aligned}2\left(e^{-2\phi} + \frac{\kappa}{4}\right)(\partial_\pm^2\phi - 2(\partial_\pm\phi)^2) - \frac{1}{2}\partial_\pm f_i\partial_\pm f_i \\ + \kappa((\partial_\pm\phi)^2 - \partial_\pm^2\phi - (\partial_\pm A_\pm)^2 - \partial_\pm^2 A_\pm) = 0 \\ \Rightarrow \kappa t_\pm(x^\pm) = \sqrt{\kappa}\partial_\pm^2\Omega + \frac{1}{2}\partial_\pm f_i\partial_\pm f_i\end{aligned}\quad (4.3.16)$$

となる。ここで、 $t_\pm(x^\pm) \equiv -(\partial_\pm A_\pm)^2 - \partial_\pm^2 A_\pm$ である。 t_\pm は不定だが、 $f_i = 0$ のときに時空が平坦になるように設定しよう。つまり、 $f_i = 0$ のとき式(4.3.15)が成り立つようにする。そのためには、

$$\begin{aligned}t_\pm &= \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\partial_\pm^2\left[-\frac{\lambda^2}{\sqrt{\kappa}}x^+x^- - \frac{\sqrt{\kappa}}{4}\ln(-\lambda^2x^+x^-)\right] \\ &= \frac{1}{4(x^\pm)^2}\end{aligned}\quad (4.3.17)$$

とならねばならない。ここまでで、運動方程式は次の式に帰着できることが分かった。

$$\partial_+\partial_-\Omega = \frac{\lambda^2}{\sqrt{\kappa}} \quad (4.3.18)$$

$$\partial_\pm^2\Omega = \frac{\sqrt{\kappa}}{4(x^\pm)^2} - \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\partial_\pm f_i\partial_\pm f_i \quad (4.3.19)$$

$$\left[\Omega \equiv \frac{\sqrt{\kappa}}{2}\phi + \frac{e^{-2\phi}}{\sqrt{\kappa}}\right]$$

ここで、再び物質場として ingoing shock wave を考えよう。つまり、

$$\begin{aligned}\partial_+ f_i \partial_+ f_i &= 2a\delta(x^+ - x_0^+) \\ \partial_- f_i &= 0\end{aligned}\tag{4.3.20}$$

である。このとき式 (4.3.18), (4.3.19) を解くと、

$$\Omega = -\frac{\lambda^2}{\sqrt{\kappa}}x^+x^- - \frac{\sqrt{\kappa}}{4}\ln(-\lambda^2x^+x^-) - \frac{a}{\sqrt{\kappa}}(x^+ - x_0^+)\theta(x^+ - x_0^+)\tag{4.3.21}$$

が得られる。ただし、CGHS モデルのときと同様に $x^+ < x_0^+$ では時空が平坦になるように積分定数と調節した。

解が求まったので、時空構造を調べよう。リッチスカラーは、

$$R = 8e^{-2\rho}\partial_+\partial_-\rho\tag{4.3.22}$$

で与えられる。ここで、

$$\partial_+\partial_-\rho = \frac{1}{\Omega'}\left(\partial_+\partial_-\Omega - \frac{\Omega''}{\Omega'^2}\partial_+\Omega\partial_-\Omega\right), \quad [' \equiv \frac{d}{d\phi}]\tag{4.3.23}$$

と書けることを確かめられるので、 $\Omega' = 0$ が curvature singularity であることが分かる。つまり、 $x^+ > x_0^+$ では $e^{-2\phi} = \kappa/4$ のとき singular である。これを、解 (4.3.21) に代入すると singularity の位置を表す曲線

$$1 - \ln\frac{\kappa}{4} = -\frac{4\lambda^2}{\kappa}x^+x^- - \ln(-\lambda^2x^+x^-) - \frac{4a}{\kappa}(x^+ - x_0^+)\tag{4.3.24}$$

が得られる。さらに apparent horizon の位置を求めよう。2次元重力では普通の意味の apparent horizon は定義できないが、2.3.3 節で述べたように、 $e^{-2\phi}$ が球対称時空における“ r^2 ”に対応していることを考えると

$$\partial_+\phi = 0\tag{4.3.25}$$

が apparent horizon の定義として自然である。 $\partial_+\phi = 0 \Leftrightarrow \partial_+\Omega = 0$ であることを利用して計算すると、

$$x^+(x^- + \frac{a}{\lambda^2}) = -\frac{\kappa}{4\lambda^2}\tag{4.3.26}$$

が apprent horizon を表す曲線であることが分かる。この時空の構造は図 4.3 のようになる。singularity の曲線 (4.3.24) と apparent horizon の曲線 (4.3.26) の交点は存在して

$$\begin{aligned}x^+ &= \frac{\kappa}{4a}(e^{4ax_0^+/\kappa} - 1) \\ x^- &= -\frac{a}{\lambda^2}(1 - e^{-4ax_0^+/\kappa})^{-1}\end{aligned}\tag{4.3.27}$$

である。これは、singularity が apparent horizon の外側に出てきて裸の特異点が形成されることを表している。つまり、Hawking 輻射の反作用を考慮しても、裸の特異点が形成され、特異点問題は解決することはできない、というのが結論である。またこの交点は singularity が space like から time like に変わる点でもある。図 4.3 を conformal 変換して Penrose 図を描くと図 4.4 のようになる。

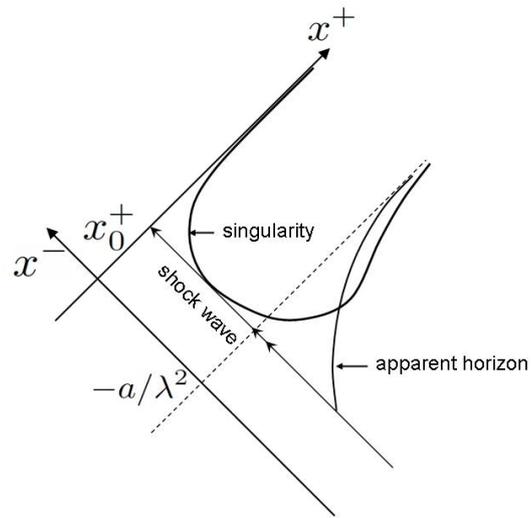


図 4.3: 平坦な時空に shock wave が入射してきたときの時空図 (Hawking 輻射あり)

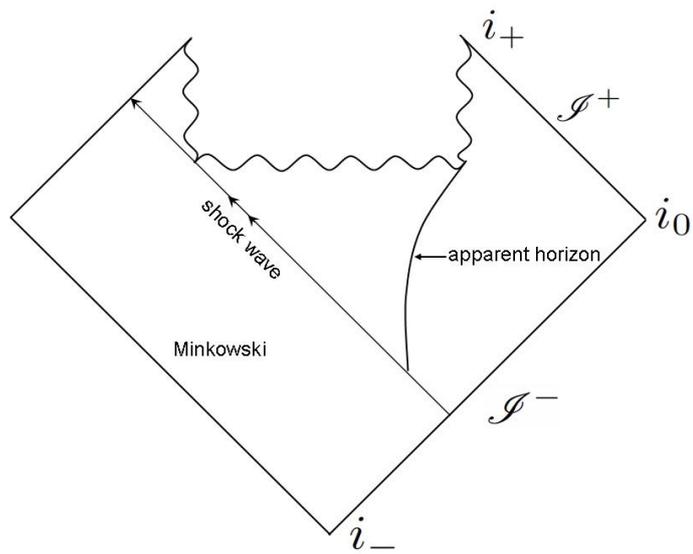


図 4.4: RST モデルの Penrose 図

4.4 horizon constraint の方法と RST モデル

ここでアノマリーとブラックホール物理に関する研究が思いつく。アノマリーを起源として、Hawking 輻射とブラックホールエントロピーを説明できることは 2.3, 3.3 節で分かった。しかし、これらは Hawking 輻射とエントロピーを別々に扱っており、直接的なつながりを見ることはできていない。対称性の破れの観点から Hawking 輻射とブラックホールエントロピーを同時に説明できないだろうか。2.3 節では、ホライズン上で一般座標変換不変性が破れてゲージモードが物理的模式に変わることによりエントロピーが生み出される、という描像が得られた。Hawking 輻射はその新たな物理的模式がホライズン上から流れ出したものである、というイメージをすることができる (図 4.5)。

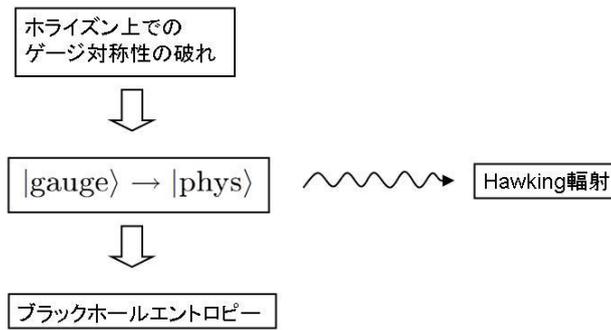


図 4.5: アノマリーを起源とした Hawking 輻射とブラックホールエントロピーの統一的理解

それを確認するためのモデルとして RST モデルは最適である。RST モデルでは作用の段階で物質場の量子効果 (すなわち Hawking 輻射の効果) が入ったもの (式 (4.3.3)) を考えるので、Hawking 輻射の効果を入れながら、horizon constraint の方法を実行することが出来そうである。その際にホライズンに手を入れる constraint をどうするかが問題であるが、我々の予想としては、うまく constraint を入れることにより、時間発展する Virasoro 代数

$$[L[\xi], L[\eta]] = iL[\xi\eta' - \eta\xi'] - \frac{i}{48\pi} \int dv c(g, \phi, f, \chi)(\xi'\eta'' - \eta'\xi'') \quad (4.4.1)$$

が得られると考えられる。central charge が場を通して時間に依っているので、その結果得られるエントロピーも時間によるはずである。この計算により Hawking flux と central charge の関係を調べれば、“対称性の破れ具合”を表す central charge という一つの量で Hawking 輻射とブラックホールエントロピーを説明でき、図 4.5 の描像も確認できるはずである。

この研究を行うためには、時空の境界と対称性の破れに注目したいいくつかの研究 [35, 36, 37, 38] との比較をしながら horizon constraint の方法をより深く理解していくことが必要である。

第5章 Kaluza-Klein ブラックホールと不安定性

これまでの議論は、コンパクト化されていない時空、特に4次元ブラックホールを念頭においたものであった。一方、この論文の目標はKaluza-Klein ブラックホールの蒸発過程を理解することである。Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発に議論を移す前に、まず背景時空について説明しておかねばならない。この章では、まずKaluza-Klein コンパクト化について簡単に説明した後で、Kaluza-Klein 時空におけるブラックホールについて考察していく。ここでは、Kaluza-Klein ブラックホールの中で最も基本的なブラックブレン(ストリング)解を紹介する。蒸発過程を調べる上で最も重要なKaluza-Klein ブラックホールの性質の一つとしてその不安定性(Gregory-Laflamme instability[39])が挙げられる。この不安定をまず定性的に理解するために熱力学的な観点から不安定性を議論する[40]。その次に実際にこの不安定性を線形摂動論で示す。これは我々独自のdimensional reductionの方法で示すことにする。

5.1 コンパクト化と有効作用

第1章のイントロダクションで述べたように、超弦理論は、我々の時空は4次元でなく、より高次元であることを予言する。しかし、我々の観測する時空は4次元なので、このギャップを埋めるために余った6次元を小さくコンパクト化する必要がある。直観的には余った次元を小さく丸めれば4次元に見える、というのはもっとものような気がするが、実際に場の理論の観点から、コンパクト化によりどのように4次元有効作用が得られるかを調べておこう。簡単のため5次元時空を考えて、計量を

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\mu)dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (5.1.1)$$

とおく。ここで、 y 方向は長さ L でコンパクト化されているとする。この時空上のmassless実スカラー場を考えてみる。

$$S = -\frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{-g_{(5)}} (\nabla_{(5)}\phi)^2 = -\frac{1}{2} \int d^4x dy \sqrt{-g} [(\nabla\phi)^2 + (\partial_y\phi)^2] \quad (5.1.2)$$

ここで、 $g_{(5)}$ は5次元計量で、 $\nabla_{(5)}$ は5次元計量での共変微分である。 ϕ の y 依存性をFourier展開すると、 $y \sim y + L$ で ϕ は周期的でないといけないので、

$$\phi = \sum_n \phi_n(x^\mu) e^{\frac{2\pi i n}{L} y} \quad (5.1.3)$$

となる。 ϕ は実数なので、 $\phi_{-n} = \phi_n^*$ である。この表式を作用に代入すれば、

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \sum_n L \int d^4x \sqrt{-g} \left[\nabla_\mu \phi_n \nabla^\mu \phi_n^* + \left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 \phi_n \phi_n^* \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla \phi_0)^2 - \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\nabla_\mu \phi_n \nabla^\mu \phi_n^* + \left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 \phi_n \phi_n^* \right] \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

が得られる。2行目では、スカラー場が canonical に規格化されるように、 L を ϕ_n に吸収させた。この有効作用から、5次元スカラー場を4次元の観点で見ると、1つの massless スカラー場 + 無限個の massive スカラー場となることが分かる。massive スカラー場の質量は $\gtrsim L^{-1}$ である。よって、もし L^{-1} が現在の実験のエネルギースケール ($\sim \text{TeV}$) より小さければ、この massive スカラー場は観測されず、4次元理論が再現されることになる。Einstein-Hilbert 作用も見てみよう。Einstein-Hilbert 作用に式 (5.1.1) を代入すると、

$$S = M_5^3 \int d^5x \sqrt{-g^{(5)}} R^{(5)} = M_5^3 L \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (5.1.5)$$

となる。ここで、 M_5 は5次元 Planck 質量である。よって、重力場 + 物質場の系の作用は低エネルギーで、

$$\begin{aligned} S &= M_5^3 \int d^5x \sqrt{-g^{(5)}} R^{(5)} - \frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{-g^{(5)}} (\nabla^{(5)} \phi)^2 \\ &\simeq M_5^3 L \int d^4x \sqrt{-g} R - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla \phi_0)^2 \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

と書ける。スカラー場が canonical に規格化されているため物質場の作用には、 L はかからない。よって、4次元の effective な重力定数として、

$$M_{\text{Pl}} = \sqrt{M_5^3 L} \quad (5.1.7)$$

となることが分かる。このように、コンパクト化のスケールが十分小さければ低エネルギーで4次元の理論が再現されることが分かった。逆に、 $\lesssim L$ のスケールの物理では5次元的な振舞いが期待される。これは、特にブラックホールを考えたときに顕著に見ることが出来る。次節から実際に高次元ブラックホールについて説明していく。

5.2 高次元時空中におけるブラックホール

D 次元の Einstein-Hilbert action を考える。

$$S = M_D^{D-2} \int d^Dx \sqrt{-g} R \quad (5.2.1)$$

ここで、 M_D は D 次元 Planck 質量である。この作用から導かれる運動方程式は、 $R_{\mu\nu} = 0$ である。この高次元時空中で最も基本的なブラックホール解として、次の球対称解が存在する。

$$ds^2 = - \left(1 - \left(\frac{r_H}{r} \right)^{D-3} \right) dt^2 + \left(1 - \left(\frac{r_H}{r} \right)^{D-3} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2. \quad (5.2.2)$$

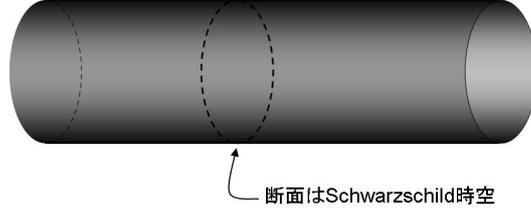


図 5.1: ブラックストリング解の形状

ここで、 $d\Omega_{D-2}^2$ は単位 $(D-2)$ 次元球面の計量である。この解を D 次元 Schwarzschild 解という。Kerr ブラックホールの高次元時空への一般化も可能で、それは Myers-Perry ブラックホールと呼ばれ、3.3.3 節で少し扱った。4 次元時空の場合、真空解のホライズンのトポロジーは S^2 に限られるが、高次元時空の場合は S^{D-2} 以外のトポロジーを持ったブラックホールを考えることができる。例えば、 $S^{n-2} \times \mathbf{R}^{D-n}$ のトポロジーを持った次のブラックホール解を構成することができる。

$$ds^2 = -V dt^2 + V^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{n-2}^2 + dy^i dy_i$$

$$V \equiv 1 - \left(\frac{r_H}{r}\right)^{n-3} \quad (5.2.3)$$

この解はブラックブレン解 ($D-n=1$ のときはブラックストリング解) と呼ばれる。この解は n 次元 Schwarzschild 時空と $(D-n)$ 次元 Euclid 空間の直積である。つまり、Schwarzschild ブラックホールを伸ばした形状をしている (図 5.1)。 $n=4$ にとり、ブラックブレンが伸びている方向 (y^1, \dots, y^{D-n} 方向) を小さくコンパクト化してやれば、我々には 4 次元の Schwarzschild ブラックホールに見えることになる。

5.3 Kaluza-Klein ブラックホールの不安定性

5.3.1 熱力学的不安定性

コンパクト化された時空では、Schwarzschild 解 (5.2.2) とブラックブレン解 (5.2.3) のどちらが実現されるのだろうか。2 章で説明したように、ブラックホールにはエントロピーが存在することが知られている。Einstein 重力 (5.2.1) の場合は、ブラックホールエントロピーはホライズン表面積に比例していて、

$$S = 4\pi M_D^{D-2} A_H \quad (5.3.1)$$

で与えられる。ここで A_H はホライズン面積である。おそらく実現されるのは熱力学的に安定な解、つまりエントロピーが大きい方の解であろう。Schwarzschild ブラックホールとブ

ブラックブレーンのエントロピーを書くと

$$\begin{aligned} S_{\text{BH}} &= 4\pi M_D^{D-2} \Omega_{D-2} r_{\text{BH}}^{D-2} \\ S_{\text{BB}} &= 4\pi M_D^{D-2} \Omega_{n-2} r_{\text{BS}}^{n-2} L^{D-n} \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

となる。添え字の BH は Schwarzschild ブラックホール、BB はブラックブレーンを表す。 r_{BH} , r_{BS} はホライズン半径、 L はコンパクト化のスケール、 Ω_N は単位 N 次元球面積で、

$$\Omega_N \equiv \frac{2\pi^{(N+1)/2}}{\Gamma((N+1)/2)} \quad (5.3.3)$$

である。Hawking 温度は

$$\begin{aligned} T_{\text{BH}} &= \frac{D-3}{4\pi r_{\text{BH}}} \\ T_{\text{BB}} &= \frac{n-3}{4\pi r_{\text{BB}}} \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

である。エントロピー S と Hawking 温度 T が分かれば、第一法則 $dM = TdS$ を積分することにより質量が得られる。

$$\begin{aligned} M_{\text{BH}} &= (D-2)M_D^{D-2} \Omega_{D-2} r_{\text{BH}}^{D-3}, \\ M_{\text{BB}} &= (n-2)M_D^{D-2} \Omega_{n-2} r_{\text{BB}}^{n-3} L^{D-n}. \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

ブラックブレーンが熱力学的に不安定である条件は

$$S_{\text{BH}}(M) > S_{\text{BB}}(M) \quad (5.3.6)$$

である。ただし、質量は等しくしておかねばならない。式 (5.3.6) を書き直すと、

$$\Omega_{D-2} r_{\text{BH}}^{D-2} > \Omega_{n-2} r_{\text{BB}}^{n-2} L^{D-n} \quad (5.3.7)$$

となり、質量が等しいという条件は、

$$(D-2)\Omega_{D-2} r_{\text{BH}}^{D-3} = (n-2)\Omega_{n-2} r_{\text{BB}}^{n-3} L^{D-n} \quad (5.3.8)$$

である。この2式から r_{BH} を消去すれば、不安定条件

$$L > \left(\frac{D-2}{n-2}\right)^{\frac{D-2}{D-n}} \left(\frac{\Omega_{D-2}}{\Omega_{n-2}}\right)^{\frac{1}{D-n}} r_{\text{BB}} \quad (5.3.9)$$

が得られる。この式から大雑把に言って、コンパクト化のスケールがホライズン半径より大きいブラックブレーンは不安定である、ということが出来る。波数 $k = 2\pi/L$ で書けば、

$$kr_{\text{BB}} < 2\pi \left(\frac{n-2}{D-2}\right)^{\frac{D-2}{D-n}} \left(\frac{\Omega_{n-2}}{\Omega_{D-2}}\right)^{\frac{1}{D-n}} \quad (5.3.10)$$

が得られる。

5.3.2 Gregory-Laflamme instability

次はブラックブレン解が不安定であることを摂動論的に示そう。この不安定性は [39, 41, 42] などですでに示されていることだが、ここではそれをオリジナルの dimensional reduction の方法で示すことにする。ここから、 $c = \hbar = M_D = 1$ の単位系を用いる。Einstein-Hilbert 作用 (5.2.1) において、 $(n-2)$ 次元の球対称性を仮定しよう。つまり、計量を

$$ds^2 = g_{MN}^{(D-n+2)}(x^M) dx^M dx^N + e^{-2\phi(x^M)} d\Omega_{n-2}^2 \quad (5.3.11)$$

の形において、s-wave のみ注目することにする。このとき、作用の球面積分は実行できてしまつて、

$$S = \Omega_{n-2} \int d^{D-n+2}x \sqrt{-g_{(D-n+2)}} e^{-(n-2)\phi} \times [R^{(D-n+2)} + (n-2)(n-3)(\nabla\phi)^2 + (n-2)(n-3)e^{2\phi}] \quad (5.3.12)$$

のように dilaton gravity に帰着する。ここで、 $R^{(D-n+2)}$ は、 $g_{MN}^{(D-n+2)}$ で作ったリッチスカラーで、 Ω_N は式 (5.3.3) と同様で単位 N 次元球面積である。さらに、 $(D-n)$ 次元の余剰次元の内、 $(D-n-1)$ 次元方向の並進対称性を仮定してしまおう。つまり、計量を

$$g_{MN}^{(D-n+2)}(x^M) dx^M dx^N = g_{\mu\nu}^{(3)}(x^\mu) dx^\mu dx^\nu + \sum_{i=1}^{D-n-1} dy^i dy_i \quad (5.3.13)$$

とにおいて、 $(D-n-1)$ 余剰次元方向は zero mode のみを考えることにする。コンパクト化のスケールを L とおくと、作用 (5.3.12) は、

$$S = \Omega_{n-2} L^{D-n-1} \int d^3x \sqrt{-g_{(3)}} e^{-(n-2)\phi} [R^{(3)} + (n-2)(n-3)(\nabla\phi)^2 + (n-2)(n-3)e^{2\phi}] \quad (5.3.14)$$

となる。ここで、 $R^{(3)}$ は $g_{\mu\nu}^{(3)}$ で作ったリッチスカラーである。ここからは、次元を表す添え字 (3) は省略する。この作用から導かれる運動方程式は、

$$R - (n-2)(n-3)(\nabla\phi)^2 + 2(n-3)\nabla^2\phi + (n-4)(n-3)e^{2\phi} = 0, \quad (5.3.15)$$

$$G_{\mu\nu} + (n-2)\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - (n-2)\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + (n-2)g_{\mu\nu}\left\{-\nabla^2\phi + \frac{n-1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{n-3}{2}e^{2\phi}\right\} = 0 \quad (5.3.16)$$

である。当然、高次元のブラックブレン解に相当する

$$\begin{aligned} ds^2 &= -V dt^2 + V^{-1} dr^2 + dy^2 \\ e^{-2\phi} &= r^2 \\ [V &\equiv 1 - \left(\frac{r_H}{r}\right)^{n-3}] \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

は、この運動方程式の解である。この3次元に落とした理論で、摂動論を行うことによってブラックブレン解の不安定性を示す。

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &\rightarrow g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \\ \phi &\rightarrow \phi + \delta\phi \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

のように back ground 解 (5.3.17) を perturb させると式 (5.3.16) は、

$$\begin{aligned}
& \delta G_{\mu\nu} - (n-2)\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\nabla_{\rho}\phi + (n-2)h_{\mu\nu}\{-\nabla^2\phi + \frac{n-1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{n-3}{2}e^{2\phi}\} \\
& + (n-2)g_{\mu\nu}\{h^{\rho\sigma}\nabla_{\rho}\nabla_{\sigma}\phi + g^{\rho\sigma}\delta\Gamma_{\rho\sigma}^{\alpha}\nabla_{\alpha}\phi - \frac{n-1}{2}h^{\rho\sigma}\nabla_{\rho}\phi\nabla_{\sigma}\phi\} \\
& + (n-2)\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\delta\phi - 2(n-2)\nabla_{(\mu}\phi\nabla_{\nu)}\delta\phi \\
& + (n-2)g_{\mu\nu}\{-\nabla^2\delta\phi + (n-1)g^{\rho\sigma}\nabla_{\rho}\phi\nabla_{\sigma}\delta\phi - (n-3)e^{2\phi}\delta\phi\} = 0
\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\delta G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}[\nabla^{\rho}\nabla_{\mu}h_{\nu\rho} + \nabla^{\rho}\nabla_{\nu}h_{\mu\rho} - \square h_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}h - Rh_{\mu\nu} \\
&\quad - g_{\mu\nu}(\nabla^{\rho}\nabla^{\sigma}h_{\rho\sigma} - \square h - R^{\rho\sigma}h_{\rho\sigma})] \\
\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\nabla_{\mu}h_{\nu\sigma} + \nabla_{\nu}h_{\sigma\mu} - \nabla_{\sigma}h_{\mu\nu})
\end{aligned} \tag{5.3.20}$$

である。ここで摂動量の $h_{\mu\nu}$ と $\delta\phi$ の形を、

$$\begin{aligned}
h_{\mu\nu}(t, r, y) &= h(r)e^{\Omega t + iky} \\
\delta\phi(t, r, y) &= \delta\phi(r)e^{\Omega t + iky}
\end{aligned} \tag{5.3.21}$$

と仮定しよう。ここで、不安定性を見つけるために解の形を $\propto e^{i\Omega t}$ のように仮定せず、 $\propto e^{\Omega t}$ のように仮定した。もし、 $\Omega > 0$ のような解を見つけることができたなら、それは不安定性の存在を意味する。作用 (5.3.14) は、ゲージ対称性があるため不安定性の解析には、ゲージモードを完全に排除する必要がある。 $h_{\mu\nu}$ と $\delta\phi$ のゲージ変換は、

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} &= -\nabla_{\mu}\xi_{\nu} - \nabla_{\nu}\xi_{\mu} \\
\bar{\delta}\phi - \delta\phi &= -\xi^{\mu}\partial_{\mu}\phi
\end{aligned} \tag{5.3.22}$$

である。成分ごとに書くと、

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{tt} - h_{tt} &= -2\Omega\xi_t + V'V\xi_r \\
\bar{h}_{tr} - h_{tr} &= -\xi'_t + \frac{V'}{V}\xi_t - \Omega\xi_r \\
\bar{h}_{ty} - h_{ty} &= -ik\xi_t - \Omega\xi_y \\
\bar{h}_{rr} - h_{rr} &= -2\xi'_r - \frac{V'}{V}\xi_r \\
\bar{h}_{ry} - h_{ry} &= -ik\xi_r - \xi'_y \\
\bar{h}_{yy} - h_{yy} &= -2ik\xi_y \\
\bar{\delta}\phi - \delta\phi &= \frac{1}{r}V\xi_r
\end{aligned} \tag{5.3.23}$$

となる。ここで $' \equiv d/dr$ である。 ξ_{μ} は式 (5.3.21) の表式を仮定した。ここで、ゲージ条件

$$\bar{\delta}\phi = 0, \bar{h}_{ty} = 0, \bar{h}_{yy} = 0 \tag{5.3.24}$$

を課そう。このとき、式 (5.3.23) から分かるように、 ξ_t, ξ_r, ξ_y が代数的に決まる。つまりこのゲージ条件はゲージを完全に固定していることが分かる。このゲージ条件下で式 (5.3.19)

を書き下すと次のようになる。

tt 成分

$$\begin{aligned} & (n-2)\{-(n-3) + (n-3)V + rV'\}h_{tt} \\ & + \{(n-2)(n-3)V + 2(n-2)rV' + k^2r^2\}V^2h_{rr} + (n-2)rV^3h'_{rr} \\ & + ikrV^2\{rV' + 2(n-2)\}h_{ry} + 2ikr^2V^2h'_{ry} = 0 \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

tr 成分

$$\begin{aligned} & (n-2)\{rV' + (n-3)V - (n-3)\}h_{tr} \\ & + (n-2)\Omega rVh_{rr} + i\Omega kr^2h_{ry} = 0 \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

ty 成分

$$\begin{aligned} & -ik\{rV' + (n-2)V\}h_{tr} - ikrVh'_{tr} \\ & + i\Omega krVh_{rr} - (n-2)\Omega Vh_{ry} - \Omega rVh'_{ry} = 0 \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

rr 成分

$$\begin{aligned} & \{k^2r^2 + (n-2)rV'\}h_{tt} - (n-2)rVh'_{tt} + 2(n-2)\Omega rVh_{tr} \\ & - (n-2)(n-3)V^2h_{rr} - ikrV\{rV' + 2(n-2)V\}h_{ry} = 0 \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

ry 成分

$$\begin{aligned} & ikr^2V'h_{tt} - 2ikr^2Vh'_{tt} + 2i\Omega kr^2Vh_{tr} - ikrV^2\{2(n-2)V + rV'\}h_{rr} \\ & - 2V\{(n-2)(n-3)V^2 - (n-2)(n-3)V + 2(n-2)rV'V + \Omega^2r^2 + r^2V''\}h_{ry} = 0 \end{aligned} \quad (5.3.29)$$

yy 成分

$$\begin{aligned} & \{-2(n-2)rV'V - 2r^2V''V + r^2V'^2\}h_{tt} + \{2(n-2)rV - r^2V'\}h'_{tt} + 2r^2V^2h''_{tt} \\ & - 2\Omega rV\{2(n-2)V + rV'\}h_{tr} - 4\Omega r^2V^2h'_{tr} \\ & + \{2(n-2)(n-3)V^2 + 6(n-2)rV'V + r^2V'^2 + 2r^2V''V + 2\Omega^2r^2\}V^2h_{rr} \\ & + \{2(n-2)rV + r^2V'\}V^3h'_{rr} = 0 \end{aligned} \quad (5.3.30)$$

tr , ty , rr , ry 成分の式を見ると、この4式から h_{tr} , h_{rr} , h_{ry} を消去できることが分かる。つまり、 h_{tt} に関する下のマスター方程式が得られる。

$$\mathcal{P}(\bar{r})\frac{d^2}{d\bar{r}^2}h_{tt} + \mathcal{Q}(\bar{r})\frac{d}{d\bar{r}}h_{tt} + \mathcal{R}(\bar{r})h_{tt} = 0. \quad (5.3.31)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\bar{r}) & \equiv -2(n-2)(\bar{k}^2 + \bar{\Omega}^2)\bar{r}^{3n-9} + \{(5n-9)\bar{k}^2 + 4(n-2)\bar{\Omega}^2\}\bar{r}^{2n-6} \\ & - 2\{(2n-3)\bar{k}^2 + (n-2)\bar{\Omega}^2\}\bar{r}^{n-3} + (n-1)\bar{k}^2, \\ \mathcal{Q}(\bar{r}) & \equiv \frac{1}{\bar{r}}[-2(n-2)^2(\bar{k}^2 + \bar{\Omega}^2)\bar{r}^{3n-9} + (n-1)\{(5n-12)\bar{k}^2 + 2(n-2)\bar{\Omega}^2\}\bar{r}^{2n-6} \\ & - \{(5n^2 - 16n + 9)\bar{k}^2 + 2(n-2)\bar{\Omega}^2\}\bar{r}^{n-3} + (n-1)(2n-5)\bar{k}^2], \\ \mathcal{R}(\bar{r}) & \equiv 2(n-2)(\bar{k}^2 + \bar{\Omega}^2)^2\bar{r}^{3n-9} - (3n-5)\bar{k}^2(\bar{k}^2 + \bar{\Omega}^2)\bar{r}^{2n-6} + (n-1)\bar{k}^4\bar{r}^{n-3} \\ & - (n-1)(n-3)^2\bar{k}^2\bar{r}^{n-5} + \frac{(n-1)(n-3)^2\bar{k}^2}{\bar{r}^2}, \end{aligned} \quad (5.3.32)$$

であり、 $\bar{r} \equiv r/r_H$, $\bar{k} \equiv kr_H$, $\bar{\Omega} \equiv \Omega r_H$ である。 h_{tr} , h_{rr} , h_{ry} は h_{tt} が決まれば自動的に決まる。

マスター方程式 (5.3.31) を解いて、ブラックブレン解の不安定性を示そう。解析的に解くことは不可能なので、数値的に解くことにする。まず、解の漸近形だけ求めておく。マスター方程式 (5.3.31) は、

$\bar{r} \gg 1$ の時、

$$\frac{d^2 h_{tt}}{d\bar{r}^2} + \frac{n-2}{\bar{r}} \frac{dh_{tt}}{d\bar{r}} - (\bar{k}^2 + \bar{\Omega}^2) h_{tt} = 0, \quad (5.3.33)$$

$\bar{r} \sim 1$ の時、

$$\frac{d^2 h_{tt}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}-1} \frac{dh_{tt}}{d\bar{r}} - \frac{\bar{\Omega}^2}{(n-3)^2(\bar{r}-1)^2} h_{tt} = 0 \quad (5.3.34)$$

となる。その解は、

$$h_{tt} \sim \begin{cases} A_\infty e^{-\sqrt{\bar{k}^2 + \bar{\Omega}^2} \bar{r}} + B_\infty e^{\sqrt{\bar{k}^2 + \bar{\Omega}^2} \bar{r}} & (\bar{r} \gg 1) \\ A_H (r-1)^{\frac{\Omega}{n-3}} + B_H (r-1)^{-\frac{\Omega}{n-3}} & (\bar{r} \sim 1) \end{cases} \quad (5.3.35)$$

である。無限遠方とホライズン上で、解が regular であることを要請しよう。つまり、 $B_\infty = B_H = 0$ を境界条件とする。これで、準備が終わり数値計算を始めることができる。Runge-Kutta algorithm を使い $\bar{r}_1 = 100.0$ から $\bar{r}_2 = 1.0001$ まで解いた。無限遠では $h_{tt} \propto e^{-\sqrt{\bar{k}^2 + \bar{\Omega}^2} \bar{r}}$ であるべきなので、初期条件は $h_{tt}(\bar{r}_1) = 1.0$, $dh_{tt}(\bar{r}_1)/d\bar{r} = -\sqrt{\bar{k}^2 + \bar{\Omega}^2}$ とおいた。この条件下で、 \bar{k} を止めて $\bar{\Omega}$ をふらしながらマスター方程式 (5.3.31) を解いていく。ホライズン近傍 $r = \bar{r}_2$ では B_H の値をチェックし、 B_H の符号が変わるときの $\bar{\Omega}$ の値を探した。この操作を様々な \bar{k} で行うことによって、分散関係 (図 5.2) が得られた。これによって不安定性が示されたことになる。さらに $\Omega = 0$ になるとき、つまり不安定と安定の境目の $k = k_{\text{crit}}$ を表 5.1 に記した。これらの結果は、[39, 41, 42] などの結果と一致している。さらに、表 5.1 に 5.3.1 節でエントロピーの議論から求めた k_{crit} (式 (5.3.10) で $D - n = 1$ とおいたもの) も書いておいた。この結果も悪くない値を与えていることが分かる。

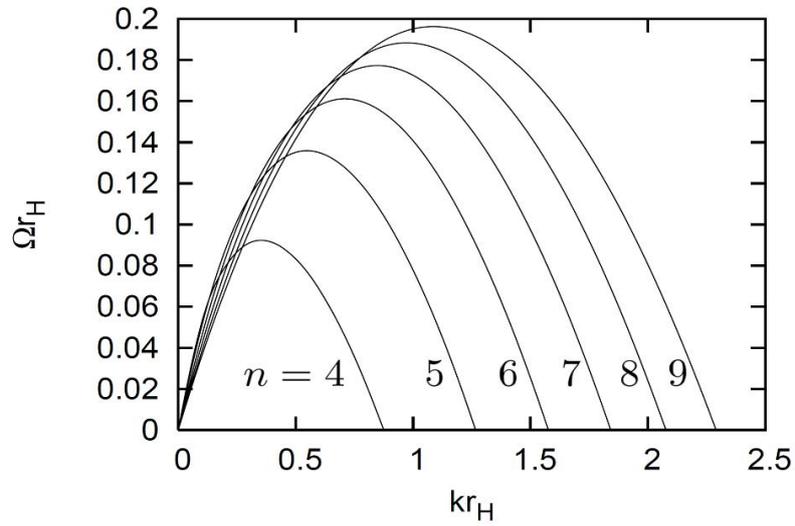


図 5.2: $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ における分散関係

n	4	5	6	7	8	9
$k_{\text{crit}} r_H$ (摂動論)	0.875	1.267	1.577	1.842	2.077	2.290
$k_{\text{crit}} r_H$ (エントロピー)	1.185	1.491	1.748	1.973	2.175	2.361

表 5.1: $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ における k_{crit} 。摂動論で求めた結果とエントロピーの比較で求めた結果が記してある。

第6章 Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発過程

この章では、この修士論文のメインテーマである Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発過程について調べる。

第3章や第4章においては、空間がコンパクト化されていない場合のブラックホールの蒸発を考えてきた。一方、前章でコンパクト化された空間においてはそのコンパクト化された空間に巻きついたブラックホールが存在することが分かった。この Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発はコンパクト化されていない空間におけるブラックホールの蒸発と大きく異なる可能性がある。その理由の一つは、前章で示した Kaluza-Klein ブラックホール特有の不安定性である。この不安定により蒸発の段階で時空構造が大きく変化する可能性がある。二つ目の理由は、内部空間の存在である。Hawking 輻射により内部空間のダイナミクスが引き起こされ、蒸発過程を大きく変える可能性がある。ここでは、特に内部空間のダイナミクスを考慮に入れて Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発過程を調べていく。その結果、これまで考えられてきたものと全く異なった Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発過程を与えることができる。

6.1 ナイーブな蒸発過程

ブラックホールは Hawking 輻射により蒸発することが分かり、さらにホライズン半径がコンパクト化のスケールより小さいブラックストリング (ブレーン) は不安定であることが分かった。これらの事実により、ブラックストリングの蒸発過程はナイーブには図 6.1 のようになると考えられる。最初、ホライズン半径 r_H がコンパクト化のスケール L よりも大きく安定だったブラックストリングは、Hawking 輻射によって痩せて行き、そのうち $r_H < L$ となる。その結果、ブラックストリングは不安定化してより好ましい状態 (前章のエントロピーの議論では球対称ブラックホール) へ変化する。しかし、この議論は不十分である。なぜなら、Hawking 輻射の反作用を準静的にしか取り入れていない。特に、コンパクト化のスケールの変化は全く考えられていない。なぜ、コンパクト化のスケールが変化すると考えられるのだろうか。それは、ブラックストリングから放出された Hawking 輻射はエネルギーを持っているからである。そのエネルギーに引っ張られて、余剰次元方向の長さが縮んでいくのである (図 6.2)。これは、宇宙収縮とのアナロジーである。宇宙論においても通常の物質は空間を縮める効果を持つ。この章では、この描像を実際に Hawking 輻射の反作用を考慮に入れた計算で確かめることにする。

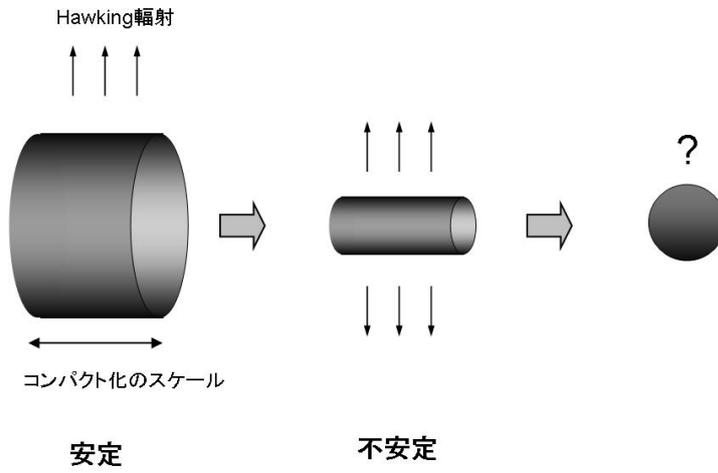


図 6.1: ナイープに考えられたブラックストリングの蒸発仮定。安定なブラックストリングが Hawking 輻射により痩せていき不安定化する。

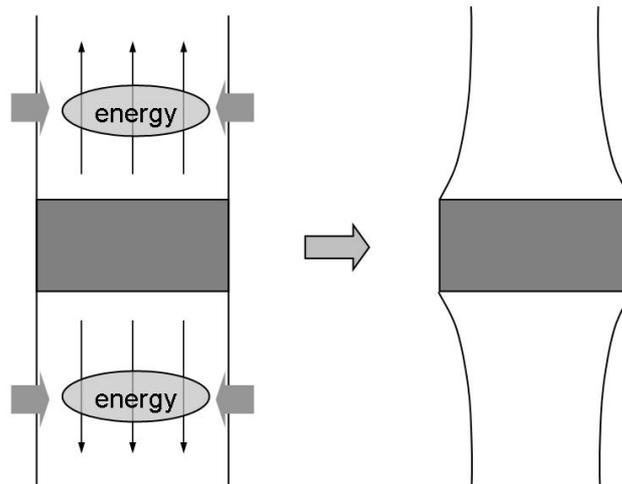


図 6.2: 内部空間が縮む理由。Hawking 輻射のエネルギーに空間が引っ張られることにより内部空間が縮む。

6.2 高次元 Einstein-Hilbert 作用の dimensional reduction

D 次元の Einstein-Hilbert 作用

$$S_g = M_D^{D-2} \int d^D x \sqrt{-g} R \quad (6.2.1)$$

を考える。ここから簡単のため話をブラックストリング解の蒸発過程に限ろう。つまり余剰次元を 1 次元とする。Schwarzschild 部分の次元を n 次元とすると、全次元は $D = n + 1$ である。上の Einstein-Hilbert 作用において球対称性を課して

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{(3)}(x^\mu) dx^\mu dx^\nu + l^2 e^{-\frac{4}{n-2}\phi(x^\mu)} d\Omega_{n-2}^2 \quad (6.2.2)$$

とおくと、

$$S_g = \Omega_{n-2} M_D (M_D l)^{n-2} \int d^3 x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left[R + 4 \frac{n-3}{n-2} (\nabla\phi)^2 + \frac{(n-2)(n-3)}{l^2} e^{\frac{4}{n-2}\phi} \right] \quad (6.2.3)$$

となる。 l は次元を合わせるために入れたパラメータである。当然この作用から導かれる運動方程式の解として、式 (5.2.3) に対応する、

$$\begin{aligned} ds^2 &= -V dt^2 + V^{-1} dr^2 + dy^2 \\ l^2 e^{-\frac{4}{n-2}\phi} &= r^2 \\ \left[V \equiv 1 - \left(\frac{r_H}{r} \right)^{n-3} \right] \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

が存在する。この章では、Hawking 輻射による蒸発を考えるので、 D 次元時空中の物質場

$$S_m = \int d^D x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} (\nabla f)^2 \right] \quad (6.2.5)$$

も考える必要がある。この物質場も dimensional reduction すると、

$$S_m = \int d^3 x \sqrt{-g_{(3)}} e^{-2\phi} \left[-\frac{1}{2} (\nabla f)^2 \right] \quad (6.2.6)$$

となる。ここで、 f は canonical に規格化した。まとめると D 次元から 3 次元へ dimensional reduction した作用は、

$$\begin{aligned} S &= \Omega_{n-2} M_D (M_D l)^{n-2} \int d^3 x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left[R + 4 \frac{n-3}{n-2} (\nabla\phi)^2 + \frac{(n-2)(n-3)}{l^2} e^{\frac{4}{n-2}\phi} \right] \\ &\quad + \int d^3 x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left[-\frac{1}{2} (\nabla f)^2 \right] \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

となる。この作用を用いれば、ブラックストリングの蒸発過程を 3 次元 dilaton gravity の context で調べることができる。

6.3 3次元 dilaton gravity の観点

前節では、高次元の作用に対称性を課して3次元 dilaton gravity の作用を得ることができた。次は、3次元時空における最も一般的な dilaton gravity の作用

$$S_g = M_3 \int d^3x \sqrt{-g} e^{F(\phi)} [R + 2a(\nabla\phi)^2 + U(\phi)] \quad (6.3.1)$$

から出発する。この作用から導かれる運動方程式の解として、

$$ds^2 = g_{ab}^{(2)}(x^a) dx^a dx^b + dy^2 \quad (6.3.2)$$

の形が許される条件を求めておく。 $g_{ab}^{(2)}$ がブラックホール解であれば、式(6.3.2)は真っ直ぐ伸びたブラックストリング解を表す。この条件を高次元の作用を dimensional reduction して得られた作用(6.2.3)が満たすのは明らかであるが、より広い条件を探しておこう。作用(6.3.1)から運動方程式を求めてみると、 ϕ の変分から、

$$F'(\phi)[R - 2a(\nabla\phi)^2 + U(\phi)] - 4a\nabla^2\phi + U'(\phi) = 0, \quad (6.3.3)$$

$g_{\mu\nu}$ の変分から、

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} - F'(\phi)\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + (2a - F'(\phi) - F'(\phi)^2)\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi \\ + g_{\mu\nu}\{F'(\phi)\nabla^2\phi + (F''(\phi) + F'(\phi)^2 - a)(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}U(\phi)\} = 0 \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

が得られる。式(6.3.4)の (y, y) 成分は、

$$-\frac{1}{2}R + F'\nabla^2\phi + (F'' + F'^2 - a)(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}U = 0 \quad (6.3.5)$$

となる。式(6.3.3)と式(6.3.5)から、 R を消去すると、

$$(2F'^2 - 4a)\nabla^2\phi + F'(2F'' + 2F'^2 - 4a)(\nabla\phi)^2 + U' = 0 \quad (6.3.6)$$

が得られる。一方、式(6.3.4)の (a, b) 成分 $(a, b \neq y)$ のトレースより、

$$F'\nabla^2\phi + (F'' + F'^2)(\nabla\phi)^2 - U = 0 \quad (6.3.7)$$

が得られる。式(6.3.6)と式(6.3.7)は、同じ背景時空中の ϕ だけの運動方程式と見ることができる。この2式が違う方程式であると解が存在しないことになる。式(6.3.6)と式(6.3.7)が矛盾しないためには、まず

$$\begin{aligned} \frac{2F'^2 - 4a}{F'} &= \frac{F'(2F'' + 2F'^2 - 4a)}{(F'' + F'^2)} \\ \Leftrightarrow aF''(\phi) &= 0 \\ \Leftrightarrow F''(\phi) &= 0 \text{ or } a = 0 \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

が成り立つ必要がある。また、

$$\frac{2F'^2 - 4a}{F'} = \frac{U'}{-U} \quad (6.3.9)$$

も満たさなければならない。まず $F'' = 0$ のときを考える。このとき、

$$F(\phi) = b\phi + c \quad (6.3.10)$$

なので、式 (6.3.9) より、

$$U(\phi) \propto \exp\left(-\frac{2b^2 - 4a}{b}\phi\right) \quad (6.3.11)$$

となる。 $b\phi + c \rightarrow -2\phi$, $4a/b^2 \rightarrow a$ と再定義してやると、作用 (6.3.1) は

$$S_g = M_3 \int d^3x \sqrt{-g} e^{-2\phi} [R + 2a(\nabla\phi)^2 + \lambda^2 e^{2(2-a)\phi}] \quad (6.3.12)$$

となる。ここで、 λ は質量の次元を持つパラメータである。次に、 $a = 0$ の場合を考えよう。このとき、式 (6.3.9) より、

$$U(\phi) \propto e^{-2F(\phi)} \quad (6.3.13)$$

となる、 $F(\phi) \rightarrow -2\phi$ と再定義すると、作用 (6.3.1) は、

$$S_g = M_3 \int d^3x \sqrt{-g} e^{-2\phi} [R + \lambda^2 e^{4\phi}] \quad (6.3.14)$$

である。これは、式 (6.3.12) で、 $a = 0$ とすれば得られるので、結局、式 (6.3.2) が解として存在するような 3 次元 dilaton gravity は、

$$S_g = M_3 \int d^3x \sqrt{-g} e^{-2\phi} [R + 2a(\nabla\phi)^2 + \lambda^2 e^{2(2-a)\phi}] \quad (6.3.15)$$

である。

今求めた作用 (6.3.15) をもう少し調べてみよう。 $a = 2$ と取ると、この作用は CGHS モデル (4.2.1) になることが分かる。つまり、CGHS モデルで求めた 2 次元ブラックホールはもう 1 次元増やして伸ばすことが可能である。また、この作用 (6.3.15) において、

$$\begin{aligned} M_3 &= \Omega_{n-2} M_D (M_D l)^{n-2} \\ a &= 2 \frac{n-3}{n-2} \\ \lambda^2 &= \frac{(n-2)(n-3)}{l^2} \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

とおくと、

$$S_g = \Omega_{n-2} M_D (M_D l)^{n-2} \int d^3x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left[R + 4 \frac{n-3}{n-2} (\nabla\phi)^2 + \frac{(n-2)(n-3)}{l^2} e^{\frac{4}{n-2}\phi} \right] \quad (6.3.17)$$

が得られる。これは、高次元の作用を dimensional reduction して作られた作用 (6.2.3) に他ならない。つまり、作用 (6.3.15) は作用 (6.2.3) において、 $n = 4, 5, 6, \dots$ であったものを $n \in \mathbf{R}$ に拡張したものである、ということができる。

作用 (6.3.15) におけるブラックストリング解を求めておくと次のようになる。 $a \neq 0, 2$ のとき

$$\begin{aligned} e^{-(2-a)\phi} &= \frac{\lambda(2-a)}{\sqrt{2a}} r \\ ds^2 &= -V dt^2 + V^{-1} dr^2 + dy^2 \\ \left[V \equiv 1 - \left(\frac{r_H}{r} \right)^{\frac{a}{2-a}} \right]. \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

$a = 2$ のとき

$$\begin{aligned}\phi &= -\frac{\lambda}{2}r \\ ds^2 &= -(1 - Ce^{-\lambda r})dt^2 + (1 - Ce^{-\lambda r})^{-1}dr^2 + dy^2\end{aligned}\tag{6.3.19}$$

$a = 0$ のとき

$$\begin{aligned}e^{-2\phi} &= \lambda r \\ ds^2 &= -\ln\left(\frac{r}{r_H}\right)dt^2 + \left(\ln\left(\frac{r}{r_H}\right)\right)^{-1}dr^2 + dy^2\end{aligned}\tag{6.3.20}$$

$a = 2$ のときの解は、CGHS モデルを伸ばした解である。この解は、[43, 44, 45, 46]などで調べられており、コンパクト化のスケールに依らず安定であることが知られている。また、[46]では代数的なアプローチでエントロピーが計算されており、2.3節の horizon constraintの方法と関連している。このように、このブラックストリング解の熱力学的性質を調べることは興味深い、不安定にはならないため、今の目的であるブラックストリングの蒸発を調べるためには良いモデルとは言えない。

一方、 $a = 0$ のときの解は、我々が発見した新しい解である。 $a = 0$ のときは、式 (6.3.16) を見ると $n = 3$ に対応していることが分かる。このときは、式 (6.3.16) では $\lambda = 0$ となっている。それにも係わらず、 λ を有限として求められたのが式 (6.3.20) である。この解は、かなり特殊であるが、高次元のブラックストリング同様ホライズンの半径がコンパクト化のスケールより小さい場合不安定である。よって、このブラックストリングは蒸発過程を調べるための良いモデルである。このブラックストリングの蒸発過程は付録 D で詳しく調べている。

6.4 ブラックストリングの蒸発

ここから、ブラックストリングの蒸発過程を考えて行く。作用 (6.3.15) は作用 (6.2.3) を完全に含んでいるので、この節では作用 (6.3.15) を用いて蒸発過程を調べることにする。ブラックホール蒸発における内部空間のダイナミクスを考えるのが我々の目標である。そのために、計量を

$$ds^2 = g_{ab}^{(2)}dx^a dx^b + e^{-2\chi}dy^2\tag{6.4.1}$$

とおく。 χ はコンパクト化のスケールを記述する場で radiaon と呼ばれる。この radion の振舞いを調べれば、内部空間のダイナミクスを知ることができる。ここから簡単のため $r_H \gg L$ の状況を考えることにして、2次元計量 $g_{ab}^{(2)}$ や radion χ の y 依存性は無視する。このとき、作用 (6.3.15) の y 積分は実行できてしまって、

$$\begin{aligned}S_g &= M_3 L \int d^2x \sqrt{-g_{(2)}} e^{-2\phi - \chi} [R^{(2)} + 2a(\nabla\phi)^2 + 4\nabla\phi \cdot \nabla\chi + U(\phi)], \\ [U(\phi) &\equiv \lambda^2 e^{2(2-a)\phi}]\end{aligned}\tag{6.4.2}$$

が得られる。ここで、 $g_{ab}^{(2)}$ から作られるリッチスカラー $R^{(2)}$ を用いて、

$$R = R^{(2)} + 2\nabla^2\chi - 2(\nabla\chi)^2\tag{6.4.3}$$

と書けることを使った。高次元ブラックストリングの蒸発過程が2次元重力で記述できることが分かる。物質場も radion を考慮しつつ1次元落とすと、

$$S_m = \int d^2x \sqrt{-g_{(2)}} e^{-2\phi-\chi} \left[-\frac{1}{2}(\nabla f)^2 \right] \quad (6.4.4)$$

となる。作用にかかるはずの L は、 f に吸収させた。Hawking 輻射を考えるので、この物質場は量子的に扱いたい。この effective action をとりあえず形式的に、

$$W[g_{(2)}, \phi, \chi] \equiv -i \ln \left(\int \mathcal{D}f e^{iS_m[g_{(2)}, \phi, \chi, f]} \right) \quad (6.4.5)$$

と書いておくことにする。ここから、次元を表す添え字 (2) は省略する。運動方程式は、 g_{ab} の変分より、

$$\begin{aligned} & M_3 L e^{-2\phi-\chi} [2\nabla_a \nabla_b \phi + \nabla_a \nabla_b \chi - 2(2-a)\nabla_a \phi \nabla_b \phi - \nabla_a \chi \nabla_b \chi \\ & + g_{ab} \{-2\nabla^2 \phi - \nabla^2 \chi + (4-a)(\nabla \phi)^2 + 2\nabla \phi \cdot \nabla \chi + (\nabla \chi)^2 - \frac{1}{2}U(\phi)\}] = \frac{1}{2}T_{ab}, \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

ϕ の変分より、

$$\begin{aligned} & -2M_3 L e^{-2\phi-\chi} [R + 2a\nabla^2 \phi + 2\nabla^2 \chi - 2a(\nabla \phi)^2 \\ & - 2a\nabla \phi \cdot \nabla \chi - 2(\nabla \chi)^2 + (a-1)U(\phi)] = -X, \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

χ の変分より、

$$-M_3 L e^{-2\phi-\chi} [R + 4\nabla^2 \phi - 2(4-a)(\nabla \phi)^2 + U(\phi)] = -Y \quad (6.4.8)$$

が得られる。ここで、

$$\begin{aligned} T_{ab} & \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W}{\delta g^{ab}} \\ X & \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W}{\delta \phi} \\ Y & \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W}{\delta \chi} \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

と定義した。式 (6.4.6) のトレースより、

$$-2\nabla^2 \phi - \nabla^2 \chi + 4(\nabla \phi)^2 + 4\nabla \phi \cdot \nabla \chi + (\nabla \chi)^2 - U(\phi) = \frac{1}{2M_3 L} e^{2\phi+\chi} T_a^a \quad (6.4.10)$$

が得られる。さらに、式 (6.4.7) と式 (6.4.8) から R を消去すると、

$$\begin{aligned} & -2(2-a)\nabla^2 \phi + 2\nabla^2 \chi + 4(2-a)(\nabla \phi)^2 - 2a\nabla \phi \cdot \nabla \chi - 2(\nabla \chi)^2 - (2-a)U(\phi) \\ & = \frac{1}{2M_3 L} e^{2\phi+\chi} (X - 2Y) \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

が得られる。式 (6.4.10) と式 (6.4.11) から $\nabla^2 \phi$ を消去すると、

$$(\nabla \chi)^2 - \nabla^2 \chi + 2\nabla \phi \cdot \nabla \chi = \frac{1}{2(4-a)M_3 L} e^{2\phi+\chi} ((2-a)T_a^a - X + 2Y) \quad (6.4.12)$$

となる。物質場の古典作用 (6.4.4) には、 ϕ と χ は $2\phi + \chi$ の組み合わせで入っている。よって、effective action W にも、 ϕ と χ は $2\phi + \chi$ の組み合わせで入っていると考えるのが自然である。実際は local counter term の入れ方によっては、 ϕ と χ に別個に依存した effective action を考えることもできるが、そのようなケースは考えないことにする。このとき、

$$X = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W[g, 2\phi + \chi]}{\delta \phi} = 2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W[g, 2\phi + \chi]}{\delta \chi} = 2Y \quad (6.4.13)$$

となるので、 $X - 2Y = 0$ である。よって、式 (6.4.12) は

$$(\nabla\chi)^2 - \nabla^2\chi + 2\nabla\phi \cdot \nabla\chi = \frac{2-a}{2(4-a)M_3L} e^{2\phi+\chi} T_a^a \quad (6.4.14)$$

となる。ここまでは、full non-linear の取り扱いであった。これらの式をそのまま解くことは難しいので、Hawking 輻射の反作用を摂動的に取り入れることにする。つまり、 T_{ab} , X , Y をソースとして、背景場を perturb させる。このとき、back ground は $\chi = 0$ であることに注意して、式 (6.4.14) を perturb させると、

$$-\square\delta\chi + 2\nabla\phi \cdot \nabla\delta\chi = \frac{2-a}{2(4-a)M_3L} e^{2\phi} T_a^a \quad (6.4.15)$$

が得られる。これは、 $\delta\chi$ だけのマスター方程式である。ここまでは、ゲージ固定はしていないが、 $\delta\chi$ はゲージ不変な量 (\because back ground が $\chi = 0$) なので、式 (6.4.15) にゲージモードが混入することはない。マスター方程式 (6.4.15) の右辺は、物質場の effective action から作られるエネルギー運動量テンソルのトレースである。物質場の古典作用 (6.4.4) は Weyl 不変なので、古典的にはエネルギー運動量テンソルのトレースはゼロである。しかし、その Weyl 不変性は量子化に伴い破れてしまう。Weyl 対称性の量子的破れのことをトレースアノマリーといい、このアノマリーによりゼロでないトレースが与えられる。このことから、radion のダイナミクスはトレースアノマリーによって induce されていると言うことも出来る。このトレースアノマリーは付録 C で計算されていて、

$$\langle T_a^a \rangle = \frac{1}{24\pi} [R - (\nabla f(\phi))^2] \quad (6.4.16)$$

となる。ここで、 $f(\phi)$ は ϕ の任意関数で量子化の際の不定性から来る。 $f(\phi)$ として何をとるべきだろうか。平坦な時空上 ($r_H = 0$) では、Hawking 輻射は存在しないであろうから $\langle T_{\mu\nu} \rangle = 0$ である。よって、 $r_H = 0$ のとき、トレースアノマリーは 0 になるべきである。そのためには、 $f = 0$ ととれば良いことが分かる。

$a = 2$ の CGHS ブラックストリングについては、マスター方程式 (6.4.15) の右辺はゼロである。つまり、CGHS ブラックストリングは古典的にも量子的にも安定である。このように CGHS ブラックストリングは他のブラックストリングと異なる特性を持っていることが分かる。

式 (6.4.15) は大雑把に言って波動方程式の右辺に“外力”が入っている形になっている。このように、弦に外力が働く状況で弦の振動を解く問題であると解釈するのは、直観的理解のために重要である。次節で、実際に radion の振舞いを見ていく。

6.5 radion の振舞い

$a = 2$ のときは、内部空間は動かない。また、 $a = 0$ の蒸発過程は、付録 D で調べているので、これからは、 $0 < a < 2$ の場合を考える。高次元ブラックストリングの描像に戻って、式 (6.3.16) の対応を使うと、マスター方程式 (6.4.15) は、

$$-\square\delta\chi + 2\nabla\phi \cdot \nabla\delta\chi = \frac{1}{2(n-1)\Omega_{n-2}M_D^{n-1}L} \frac{T_a^a}{(le^{-\frac{2}{n-2}\phi})^{n-2}} \quad (6.5.1)$$

と書くことができる。このマスター方程式を (t, r) 座標で書き下すと、

$$\delta\chi_{,tt} - V^2\delta\chi_{,rr} + (2V\phi_{,r} - V_{,r})V\delta\chi_{,r} = F(r) \quad (6.5.2)$$

となる。ここで、

$$V \equiv 1 - \left(\frac{r_H}{r}\right)^{n-3} \quad (6.5.3)$$

である。また、 $F(r)$ は radion に働く“外力”で

$$F(r) \equiv \frac{1}{2(n-1)\Omega_{n-2}M_D^{n-1}L} \frac{VT_a^a}{(le^{-\frac{2}{n-2}\phi})^{n-2}} \quad (6.5.4)$$

である。方程式 (6.5.2) を解くために $\delta\chi$ の初期条件が必要になるがそれを $\delta\chi(t=0, r) = \delta\chi_{,t}(t=0, r) = 0$ とする。まず、 $\delta\chi$ の動き始めだけを考えてみよう。動き始めでは、 $\delta\chi = \delta\chi_{,t} = 0$ としてよいので、

$$\begin{aligned} \delta\chi_{,tt} &= F(r) \\ \Rightarrow \delta\chi &= \frac{1}{2}F(r)t^2 \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

が得られる。 $F(r)$ の具体的な表式を計算する。式 (6.2.4) より、

$$le^{-\frac{2}{n-2}\phi} = r \quad (6.5.6)$$

であり、また、トレースアノマリーの表式 (6.4.16) で $f = 0$ としたものを用いると、

$$T_a^a = \frac{R}{24\pi} = -\frac{V_{,rr}}{24\pi} = \frac{(n-2)(n-3)}{24\pi} \frac{1-V}{r^2} \quad (6.5.7)$$

となるので、

$$F(r) = \frac{(n-2)(n-3)}{48\pi(n-1)\Omega_{n-2}M_D^{n-1}L} \frac{V(1-V)}{r^n} \quad (6.5.8)$$

となる。よって、 $F(r)$ の関数形は図 6.3 のようになることが分かる。

これにより、radion の動き始めの振舞いを絵にすると図 6.4 のようになる。

ここで、radion の動き始めの振舞いの式 (6.5.5) が使える条件を求めておく。式 (6.5.5) が使えるのは、 $\delta\chi_{,tt} \gg \delta\chi_{,rr}$ のときまでである。 $\delta\chi \sim F(r)t^2$ を代入すると、 $t \ll \sqrt{F/F''}$ となる。 $F(r)$ の変化のスケールは $\sim r_H$ であるから、 $t \ll r_H$ のとき、式 (6.5.5) は使えることが分かる。また、 $F(r) \sim 1/(M_D^{n-1}Lr_H^n)$ であるので、 $\delta\chi$ の大きさを見積もると

$$\delta\chi \sim \frac{t^2}{M_D^{n-1}Lr_H^n} \quad (t \ll r_H) \quad (6.5.9)$$

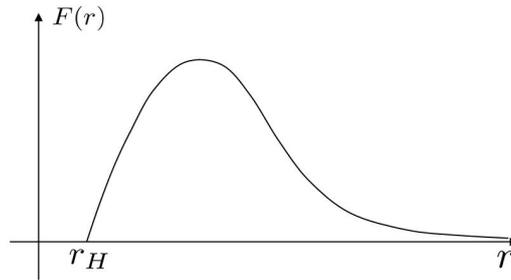


図 6.3: $F(r)$ の関数形

であることが分かる。

図 6.4 の radion の振舞いを見ると、non-linear の radion ダイナミクスに対する予想を立てることができる。内部空間が縮む理由は、Hawking 輻射のエネルギーにより内部空間が引っ張られるからであると考えられる。これは宇宙収縮とのアナロジーである。収縮していく宇宙に関しては、そのうち空間が潰れて、singularity になってしまう。同様に、ブラックストリング時空の内部空間に関しても、Hawking 輻射により内部空間が潰れてしまうのではないかと類推することができる。しかも、図 6.4 の radion の振舞いでは、内部空間の縮み方は非一様である。このことから、内部空間は Hawking 輻射によってピンチするのではないかと我々は予想している (図 6.5)。内部空間がちぎれるので、ブラックホールは我々の時空から切り離される。一方、我々の時空には穴が開く。ちぎれた点は古典的には特異点であるが、量子重力効果によりうまくならされて正則化されていると考えられる。このブラックストリングの蒸発の描像は、今まで考えられてきたものと全く異なったものである。

6.6 弦モデル

前節で radion の動き始めの振舞いを調べた。さらに時間が経過したときの radion の振舞いを調べるためには式 (6.4.15) をまともに解かなくてはならない。それは難しいので、方程式を簡単化して定性的な振舞いを見してみる。radion のマスター方程式 (6.4.15) を、

$$r_* = \int \frac{dr}{V} \quad (6.6.1)$$

を用いて書き下すと、

$$\delta\chi_{,tt} - \delta\chi_{,**} + 2\phi_{,*}\delta\chi_{,*} = F(r) \quad (6.6.2)$$

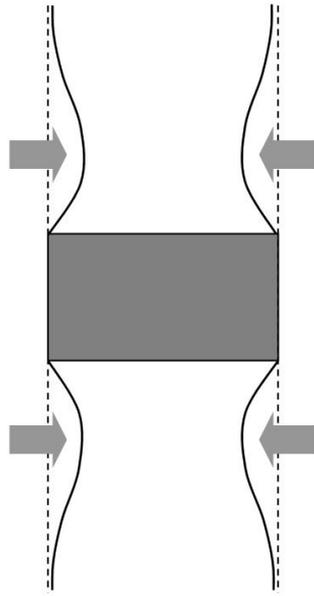


図 6.4: 内部空間の動き始め。ホライズンの少し外側で内部空間がくびれていく。

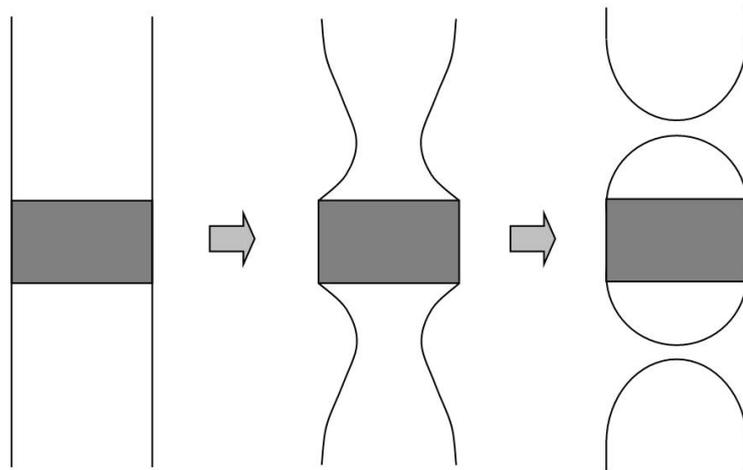


図 6.5: 内部空間のピンチ。ブラックストリングを含む空間が切り離される。

となる。ここで $\partial/\partial r_* \equiv \partial/\partial r_*$ である。この式で、 $2\phi_{,*}\delta\chi_{,*}$ があると解きにくいので、このタームは無視する。この正当性は後でチェックする。 r_* と r の関係の漸近形は、

$$r_* \sim \begin{cases} r & (r \rightarrow \infty) \\ \frac{1}{n-3}r_H \ln\left(\frac{r-r_H}{r_H}\right) & (r \sim r_H) \end{cases} \quad (6.6.3)$$

となる。逆に解けば、

$$\begin{cases} r \sim r_* & (r_* \rightarrow \infty) \\ \frac{r-r_H}{r_H} \sim e^{(n-3)r_*/r_H} & (r_* \rightarrow -\infty) \end{cases} \quad (6.6.4)$$

である。よって、 $F(r)$ の漸近形を r_* 座標で書くと、

$$F(r_*) \sim \frac{(n-2)(n-3)}{48\pi(n-1)\Omega_{n-2}M_D^{n-1}Lr_H^n} \left(\frac{r_H}{r}\right)^{n-3} \quad (r_* \rightarrow \infty) \quad (6.6.5)$$

$$F(r_*) \sim \frac{(n-2)(n-3)^2}{48\pi(n-1)\Omega_{n-2}M_D^{n-1}Lr_H^n} e^{(n-3)r_*/r_H} \quad (r_* \rightarrow -\infty) \quad (6.6.6)$$

となる。ゆえに、 $F(r)$ の r_* 座標での関数形は図 6.6 のようになる。

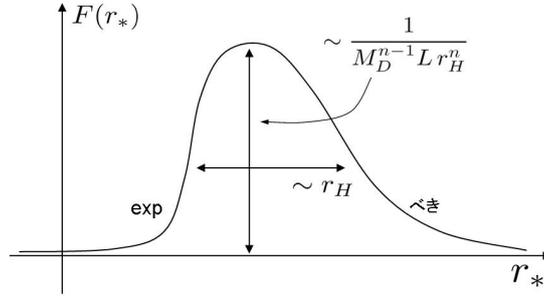


図 6.6: $F(r)$ の関数形 (r_* 座標)

$F(r_*)$ の広がり $\sim r_H$ 程度である。また、 $F(r)$ の高さは式 (6.5.8) より $F(r) \sim 1/(M_D^{n-1} L r_H^n)$ と見積もれる。よって、この $F(r_*)$ を Gaussian で近似すると、

$$F(r_*) \sim \frac{1}{M_D^{n-1} L r_H^n} e^{-(r_*/r_H)^2} \quad (6.6.7)$$

となる。この偏微分方程式ならば解くことができ、

$$\delta\chi \sim \frac{1}{M_D^{n-1} L r_H^{n-1}} \left[\frac{f(r_*+t) + f(r_*-t)}{2} - f(r_*) \right] \quad (6.6.8)$$

となる。ここで $f(r_*)$ は Gaussian の二回積分で、

$$f(r_*) \equiv \int_{-\infty}^{r_*} dy \int_{-\infty}^y dx \frac{1}{r_H} e^{-\frac{x^2}{r_H^2}} \quad (6.6.9)$$

である。 $f(r)$ の関数形は図 6.7 のようになる。よって、時刻 t における $\delta\chi$ の関数形は図 6.8 のようになる。

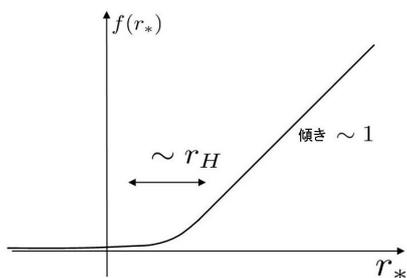


図 6.7: $f(r)$ の関数形

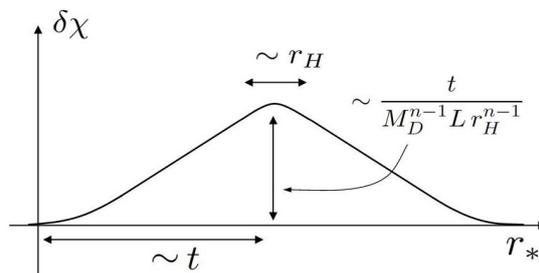


図 6.8: radion の変化

外力により、“弦” がせり上がって来ているのが分かる。 $\delta\chi$ の関数形の丸みが無視できるとき、つまり $t \gg r_H$ のとき、 $\delta\chi$ の大きさは、

$$\delta\chi \sim \frac{t}{M_D^{n-1} L r_H^{n-1}} \quad (t \gg r_H) \quad (6.6.10)$$

と見積もることができる。

次に、マスター方程式 (6.6.2) において $2\phi_{,*}\delta\chi_{,*}$ のタームを無視したことの正当性を確かめなければならない。まず、

$$\phi_{,*} = V\phi_{,r} \sim \frac{V}{r} \sim \begin{cases} 1/r_* & (r_* \rightarrow \infty) \\ \frac{1}{r_H} e^{(n-3)r_*/r_H} & (r_* \rightarrow -\infty) \end{cases} \quad (6.6.11)$$

なので、 $\phi_{,*}(r_*)$ も極大値をとり、広がり $\sim r_H$ をもつ関数である。極大値をとる点は、 $F(r)$ と大体同じで $r \sim \mathcal{O}(r_H)$ である。一方、 $\delta\chi_{,*}$ の関数形は式 (6.6.8) を代入すると得られる。 $\phi_{,*}$, $\delta\chi_{,*}$ をグラフに描くと図 6.9 のようになる。

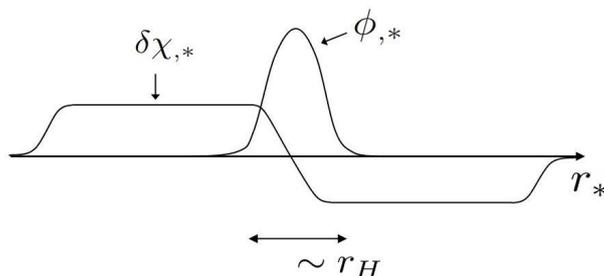


図 6.9: $\phi_{,*}$ と $\delta\chi_{,*}$

$\delta\chi$ の頂点近傍では、 $\phi_{,*} \sim 1/r_H$, $\delta\chi_{,**} \gg \delta\chi_{,*}/r_H$ なので $\delta\chi_{,**} \gg \phi_{,*}\delta\chi_{,*}$ となり $\delta\chi_{,**}$ が

dominate する。頂点から r_H 以上離れると $\delta\chi_{,*}$ は効いてくるが、 $\phi_{,*}$ に suppress されるため、 $\delta\chi_{,**} \sim \phi_{,*}\delta\chi_{,*}$ である。つまり、どの点においても $2\phi_{,*}\delta\chi_{,*}$ が dominate することはないことが分かる。これにより、 $2\phi_{,*}\delta\chi_{,*}$ を無視した取り扱いが正当化された。

6.7 ピンチするまでのタイムスケールの見積もり

もし、内部空間がピンチするとしたらどの程度のタイムスケールでピンチするのであろうか。また、それはブラックストリングの寿命や Gregory-Laflamme instability が起きるまでの時間とどちらが早いだろうか。それぞれのタイムスケールを見積もって比較してみることにする。式 (6.5.9), (6.6.10) より、radion の大きさは、

$$\delta\chi \sim \begin{cases} \frac{t^2}{M_D^{n-1} L r_H^n} & (t \ll r_H) \\ \frac{t}{M_D^{n-1} L r_H^{n-1}} & (t \gg r_H) \end{cases} \quad (6.7.1)$$

と見積もられる。この式からピンチするまでのタイムスケール τ_{pinch} を見積もってみる。 $\delta\chi \sim 1$ でピンチするとすると、

$$\begin{aligned} \tau_{\text{pinch}} &\sim \begin{cases} \sqrt{M_D^{n-1} L r_H^{n-2}} \times r_H & (\tau_{\text{pinch}} \ll r_H) \\ M_D^{n-1} L r_H^{n-2} \times r_H & (\tau_{\text{pinch}} \gg r_H) \end{cases} \\ &\sim \begin{cases} \sqrt{M_D^{n-1} L r_H^{n-2}} \times r_H & (r_H \ll 1/(M_D^{n-1} L)^{\frac{1}{n-2}}) \\ M_D^{n-1} L r_H^{n-2} \times r_H & (r_H \gg 1/(M_D^{n-1} L)^{\frac{1}{n-2}}) \end{cases} \end{aligned} \quad (6.7.2)$$

となる。ここで、 $(M_D^{n-1} L)^{\frac{1}{n-2}}$ は、 $(D-1)$ 次元の effective な Planck エネルギーである。よって、 $r_H \ll 1/(M_D^{n-1} L)^{\frac{1}{n-2}}$ は、ホライズン半径が Planck スケールより小さい状況である。このときは、量子重力効果が dominant になるので取り扱い不可能である。よって、 $r_H \gg 1/(M_D^{n-1} L)^{\frac{1}{n-2}}$ の状況だけを考えることにする。 $M_{D-1} \equiv (M_D^{n-1} L)^{\frac{1}{n-2}}$ とおけば、内部空間がピンチするまでにかかる時間は、

$$\tau_{\text{pinch}} \sim M_D^{n-1} L r_H^{n-1} \sim M_{D-1}^{n-2} r_H^{n-1} \quad (6.7.3)$$

と見積もれる。これを他のタイムスケールと比較してみよう。まず、ブラックストリングの寿命を計算してみる。1次元コンパクト化されているので、 $(D-1)$ 次元の有効理論で考えれば良い。このときの Stephan-Boltzmann の法則は、

$$\frac{dM}{dt} \sim -AT^n \quad (6.7.4)$$

となる。ここで、 A は $(D-1)$ 次元の観点から見たホライズン面積で $A \sim r_H^{n-2}$ である。また、Hawking 温度は $T \sim 1/r_H$ 、質量とホライズン半径の関係は、 $M \sim M_{D-1}^{n-2} r_H^{n-3}$ なので、

$$\frac{dr_H}{dt} \sim -\frac{1}{M_{D-1}^{n-2} r_H^{n-2}} \quad (6.7.5)$$

が得られる。よって、ブラックストリングの寿命は、

$$\tau_{\text{lifetime}} \sim M_{D-1}^{n-2} r_H^{n-1} \sim \tau_{\text{pinch}} \quad (6.7.6)$$

となる。このことから、内部空間がピンチするタイムスケールはブラックホールの寿命と同程度であることが分かった。では、Gregory-Laflamme instability が起きるタイムスケールはどの程度であろうか。5.3 節の図 5.2 から分かるように、不安定性が一度起きると $\sim r_H$ 程度のタイムスケールで成長する。Gregory-Laflamme instability はホライズン半径が $\sim L$ 程度になったあとに起きるので、この不安定性が起きるまでの時間は

$$\tau_{\text{GL}} \sim M_D^{n-1}(r_H^n - L^n) + L \sim M_D^{n-1}r_H^n \sim \tau_{\text{lifetime}} \quad (6.7.7)$$

である。よって、

$$\tau_{\text{pinch}} \sim \tau_{\text{GL}} \sim \tau_{\text{lifetime}} \quad (6.7.8)$$

となり、すべてがほぼ同時に起こることになる。つまり、タイムスケールを見積もるだけでは、どちらが先に起こるかは結論することはできない。しかし、内部空間のピンチは十分起こりうることは分かった。

本当にピンチするかどうかは、実際に non-linear の方程式を解かなければ確かめられないが、起こるとして行ったタイムスケールの議論もまだ問題が残っている。内部空間のダイナミクスを調べる際に初期条件として、 $\delta\chi(t=0, r) = \delta\chi_{,t}(t=0, r) = 0$ を用いた。我々は、実際に重力崩壊を解いてないので、この初期条件は人為的に入れるしかなかった。しかし、4.3 節の RST モデルで行ったように、実際に重力崩壊によって平坦な時空がブラックストリング時空に変わるといった状況を解くことができれば、Hawking 輻射の onset が自動的に入り、初期条件が自動的に決まる。このような状況で解いた解いた場合ピンチするまでのタイムスケールは変わってくるかもしれない。

また、radion の振舞い (図 6.4) を見るとホライズン上では、内部空間は変化しない。これは、Schwarzschild 時間ではホライズン上で時間が止まっているからであり、本当にホライズン上でコンパクト化のスケールが変化しない訳ではない。実際に、Kruskal 座標でに変換してみると、ホライズン上で内部空間が一番初めに動く結果になる。これは、spacelike につながれた事象の時間の前後というのは座標変換でいくらでも変えられるということを反映している。しかし、我々が観測するのは Schwarzschild 時間であるはずなので、少なくとも観測的には内部空間はくびれる、と言って良いであろう。

第7章 結論

この修士論文の目標は、内部空間のダイナミクスを考慮に入れて Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発過程を明らかにすることであった。そのための準備として、まず、コンパクト化されていない時空中におけるブラックホールの蒸発過程のレビューを行った。そこで、静的なブラックホールの性質としてブラックホールには熱力学的性質があり、さらに熱的な輻射を出すことを述べた。また、その Hawking 輻射の背景時空への反作用の取り扱い方を説明した。

レビューで用いた手法を応用して、Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発過程の研究を行った。Hawking 輻射の背景時空への反作用は摂動的に取り入れることにして、内部空間のダイナミクスを調べた。その結果、古典的には安定だった内部空間が Hawking 輻射により不安定化することが確かめられた。また、内部空間は、Hawking 輻射に引っ張られることにより、小さくなる方向に変化することが分かった。この摂動論の結果により、我々は non-linear のダイナミクスとして、内部空間は Hawking 輻射によりピンチするのではないかと予想を立てた。この Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発過程は今まで考えられてきたものと全く異なったものである。この予想が正しいと仮定し、ピンチするまでのタイムスケールを見積もった。その結果、このタイムスケールはブラックストリングの寿命や Gregory-Laflamme instability が起きるまでのタイムスケールと同程度であることが分かった。つまり、内部空間のピンチは十分起こる可能性があることが判明した。

まだ、不十分な点は、前章の最後に述べた初期条件の問題である。我々は、内部空間の初期条件を人為的に決めた。他の初期条件を用いた場合ピンチするまでのタイムスケールは変化するかもしれない。実際に確かめるためには、平坦な時空が重力崩壊してブラックストリング時空になる状況を解いて、初期条件を自然に入れる必要がある。

この研究の拡張としてまず思いつくのは、他の Kaluza-Klein ブラックホールにこの研究を応用することである。この論文で議論したコンパクト化の方法は、最も簡単な S^1 コンパクト化であった。他のより現実的なコンパクト化をした場合にも同じ内部空間の振舞いが得られるかどうかは、取り組むべき課題である。

この研究の宇宙論への応用も考えられる。インフレーションの量子揺らぎにより、原始ブラックホールが生成されたと考えられているが、その Hawking 輻射が元素合成に影響を与えないという条件からインフレーション理論へ制限がついている。Kaluza-Klein ブラックホールの蒸発が我々が予想したようにこれまで考えられてきたものと大きく異なった場合、その制限が大きく変更されるかもしれない。その可能性について調べる必要がある。また、Hawking 輻射と内部空間の不安定性の関係をインフレーション時の粒子生成にも応用することも考えられる。内部空間のダイナミクスに注目することによって、新しいインフレーションシナリオを考えることができるかもしれない。

謝辞

早田次郎助教授には修士論文を書くにあたって丁寧な指導をして頂きました。また、日ごろから研究に関する様々なアドバイスをして頂きました。心から感謝致します。この修士論文における研究の共同研究者である菅野優美さんに感謝致します。講義、ゼミ、コロキウムなどを通して、修士論文を仕上げるために必要な基礎知識を教えて頂いた中村卓史教授、犬塚修一郎助教授、田中貴浩助教授、井岡邦仁助手、山田良透助手に感謝致します。天体核研究室、基礎物理学研究所の皆様には様々な場面でお世話になりました。特に、同期の井上博登君、棚橋典大君、武藤恭之君、川畑亮二君、丹澤優さん、村瀬孔大君、VIENDAYANTI, Kiki さんとのゼミは基礎事項を理解するために役立ちました。感謝致します。

付録 A Wald の公式の導出

漸近的平坦、定常な n 次元ブラックホールのエントロピーは

$$S = -2\pi \int_H d^{n-2}x \sqrt{h} \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta I}{\delta R_{abcd}} \right) \epsilon_{ab} \epsilon_{cd} \quad (\text{A.1})$$

H : horizon の spatial section

h : H の induced metric の determinant

$\epsilon_{\mu\nu}$: H の binormal つまり、 H に垂直な空間の volume form

I : 一般座標変換不変な作用

で与えられる [4, 5]。ただし、作用に現れる任意の場 ϕ は、ホライズン上で null になる Killing ベクトル ξ に対し $\mathcal{L}_\xi \phi = 0$ を満たす必要がある。この公式を Wald の公式という。ここでは、この公式の導出を行う。

最も一般的な一般座標不変な n -form Lagrangian

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(g_{ab}, R_{abcd}, \nabla_{a_1} R_{abcd}, \dots, \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_m)} R_{abcd}, \psi, \nabla_{a_1} \psi, \dots, \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_l)} \psi) \quad (\text{A.2})$$

を考えよう。ここで、 ψ は matter field すべての総称で任意の階数のテンソル場が何種類あっても良い。Lagrangian の中の共変微分がすべて対称の形で入っているのは、例えば $\nabla_a \nabla_b \psi = \nabla_{(a} \nabla_{b)} \psi + \nabla_{[a} \nabla_{b]} \psi$ のように書くことができ、反対称部分はリーマンテンソルを用いて書き直せるからである。Lagrangian の変分を

$$\delta \mathbf{L} = \mathbf{E}(\phi) \delta \phi + d\Theta(\phi, \delta \phi) \quad (\text{A.3})$$

と書く。 ϕ は g_{ab} も含めたすべての場の総称である ($\phi = (g_{ab}, \psi)$)。 Θ は ϕ と $\delta \phi$ の関数で symplectic potential form と呼ばれる。この symplectic potential form には $\Theta \rightarrow \Theta + d\mathbf{Y}(\phi, \delta \phi)$ の不定性がある。さらに Lagrangian にも $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L} + d\boldsymbol{\mu}(\phi)$ の不定性があるので、total で $\Theta \rightarrow \Theta + \delta \boldsymbol{\mu}(\phi) + d\mathbf{Y}(\phi, \delta \phi)$ の不定性がある。運動方程式は $\mathbf{E} = 0$ である。

Lemma

Θ は

$$\Theta = 2\mathbf{E}_R^{bcd} \nabla_d \delta g_{bc} + \Theta' \quad (\text{A.4})$$

の形に書くことができる。ここで

$$\Theta' = \mathbf{S}^{ab}(\phi) \delta g_{ab} + \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{T}_i(\phi)^{abcd a_1 \dots a_i} \delta \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_i)} R_{abcd} + \sum_{i=0}^{l-1} \mathbf{U}_i(\phi)^{a_1 \dots a_i} \delta \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_i)} \psi \quad (\text{A.5})$$

である。つまり、 $\nabla\delta g$ のターム以外は δ を ∇ の左側に置くことができる。さらに、 $(E_R^{abcd})_{b_2\dots b_n} = E_R^{abcd}\epsilon_{ab_2\dots b_n}$ と書いたとき

$$E_R^{abcd} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta R_{abcd}} \int \mathbf{L} \quad (\text{A.6})$$

である。

(\cdot) $\mathbf{L} = \epsilon L$ とおく (ϵ は volume form)。このとき、

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{L} = \epsilon \left(\frac{\partial L}{\partial g_{ab}} \delta g_{ab} + \frac{\partial L}{\partial R_{abcd}} \delta R_{abcd} + \dots + \frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_m)} R_{abcd}} \delta \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_m)} R_{abcd} \right. \\ \left. + \frac{\partial L}{\partial \psi} \delta \psi + \dots + \frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_l)} \psi} \delta \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_l)} \psi \right) + \frac{1}{2} g^{ab} \delta g_{ab} \mathbf{L} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

となる。試しに上式の内の

$$\epsilon \frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1} \nabla_{a_2)} R_{abcd}} \delta \nabla_{a_1} \nabla_{a_2} R_{abcd} \quad (\text{A.8})$$

の項を計算してみよう。schematicに計算すると

$$\begin{aligned} \delta \nabla \nabla R &= \delta(\partial \nabla R + \Gamma \nabla R) = \delta \partial \nabla R + \Gamma \delta \nabla R + \delta \Gamma \nabla R \\ &= \nabla \delta \nabla R + (\nabla \delta g \text{に比例するターム}) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

となるので、式(A.8)は、

$$\begin{aligned} &\epsilon \frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1} \nabla_{a_2)} R_{abcd}} \nabla_{a_1} \delta \nabla_{a_2} R_{abcd} + \epsilon (\nabla \delta g \text{に比例するターム}) \\ &= \nabla_{a_1} \left[\epsilon \frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1} \nabla_{a_2)} R_{abcd}} \delta \nabla_{a_2} R_{abcd} \right] - \nabla_{a_1} \left[\epsilon \frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1} \nabla_{a_2)} R_{abcd}} \right] \delta \nabla_{a_2} R_{abcd} \\ &\quad + \nabla_{a_1} [\epsilon (\delta g \text{に比例するターム})^{a_1}] + \epsilon (\delta g \text{に比例するターム}) \\ &= dV - \nabla_{a_1} \left[\epsilon \frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1} \nabla_{a_2)} R_{abcd}} \right] \delta \nabla_{a_2} R_{abcd} + \epsilon (\delta g \text{に比例するターム}) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

となる。ここで

$$V_{b_2\dots b_n} = \epsilon_{a_1 b_2\dots b_n} \left[\frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1} \nabla_{a_2)} R_{abcd}} \delta \nabla_{a_2} R_{abcd} + (\delta g \text{に比例するターム})^{a_1} \right] \quad (\text{A.11})$$

である。さらに

$$\delta \nabla R = \nabla \delta R + (\nabla \delta g \text{に比例するターム}) \quad (\text{A.12})$$

となるので、式 (A.10) は

$$\begin{aligned}
& d\mathbf{V} - \nabla_{a_1} \left[\epsilon \frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1} \nabla_{a_2)} R_{abcd}} \right] \nabla_{a_2} \delta R_{abcd} \\
& + \epsilon(\delta g \text{ に比例するターム}) + \epsilon(\nabla \delta g \text{ に比例するターム}) \\
& = d\mathbf{V} - \nabla_{a_2} \left[\nabla_{a_1} \left(\epsilon \frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1} \nabla_{a_2)} R_{abcd}} \right) \delta R_{abcd} \right] + \nabla_{a_2} \nabla_{a_1} \left[\epsilon \frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1} \nabla_{a_2)} R_{abcd}} \right] \delta R_{abcd} \\
& + \nabla_{a_2} [\epsilon(\delta g \text{ に比例するターム})^{a_2}] + \epsilon(\delta g \text{ に比例するターム}) \\
& = d\mathbf{V}' + \nabla_{a_2} \nabla_{a_1} \left[\epsilon \frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1} \nabla_{a_2)} R_{abcd}} \right] \delta R_{abcd} + \epsilon(\delta g \text{ に比例するターム})
\end{aligned} \tag{A.13}$$

となる。ここで、

$$V'_{b_2 \dots b_n} = V_{b_2 \dots b_n} + \epsilon_{a_2 b_2 \dots b_n} \left[-\nabla_{a_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1} \nabla_{a_2)} R_{abcd}} \right) \delta R_{abcd} + (\delta g \text{ に比例するターム})^{a_2} \right] \tag{A.14}$$

である。同様な計算を式 (A.7) のほかの項にも行おうと

$$\delta \mathbf{L} = \epsilon(A_g^{ab} \delta g_{ab} + E_R^{abcd} \delta R_{abcd} + E_\psi \delta \psi) + d\tilde{\Theta} \tag{A.15}$$

の形になることが分かる。ここで $\tilde{\Theta}$ は式 (A.5) の形の $(n-1)$ -form であり、また

$$\begin{aligned}
E_R^{abcd} &= \frac{\partial L}{\partial R_{abcd}} - \nabla_{a_1} \frac{\partial L}{\partial \nabla_{a_1} R_{abcd}} + \dots + (-1)^m \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_m)} \frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_m)} R_{abcd}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta R_{abcd}} \int \mathbf{L}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

である。式 (A.15) の δR_{abcd} を δg を用いて書き下すと、

$$\begin{aligned}
E_R^{abcd} \delta R_{abcd} &= 2E_R^{abcd} \nabla_a \nabla_d \delta g_{bc} + E_R^{abcd} R_{abc}{}^e \delta g_{de} \\
&= 2\nabla_a \nabla_d E_R^{abcd} \delta g_{bc} + E_R^{abcd} R_{abc}{}^e \delta g_{de} \\
&\quad + \nabla_a (2E_R^{abcd} \nabla_d \delta g_{bc}) - \nabla_d (2\nabla_a E_R^{abcd} \delta g_{bc})
\end{aligned} \tag{A.17}$$

となる。よって、式 (A.15) は

$$\delta \mathbf{L} = \epsilon(\tilde{A}_g^{bc} \delta g_{bc} + 2\nabla_a \nabla_d E_R^{abcd} \delta g_{bc} + E_\psi \delta \psi) + d(2\mathbf{E}_R^{bcd} \nabla_d \delta g_{bc} - 2\nabla_d \mathbf{E}_R^{bcd} \delta g_{bc} + \tilde{\Theta}) \tag{A.18}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}_R^{bcd})_{b_2 \dots b_n} &= E_R^{abcd} \epsilon_{ab_2 \dots b_n} \\
\tilde{A}_g^{bc} &= A_g^{bc} + E_R^{pqrb} R_{pqr}{}^c
\end{aligned} \tag{A.19}$$

である。式 (A.18) から、symplectic potential form を読み取れば

$$\Theta = 2\mathbf{E}_R^{bcd} \nabla_d \delta g_{bc} + \Theta' \quad (\Theta' \equiv -2\nabla_d \mathbf{E}_R^{bcd} \delta g_{bc} + \tilde{\Theta}) \tag{A.20}$$

が得られる。これが示したかった表式である。□

ここまでは任意の変分 δ を考えてきたが、diffiomorphism transformation $\hat{\delta}\phi = \mathcal{L}_\xi\phi$ を考えてみよう。Lagrangian はこの変換で

$$\hat{\delta}\mathbf{L} = d(\xi \cdot \mathbf{L}) \quad (\text{A.21})$$

となる。ここで $(\xi \cdot \mathbf{L})_{b_2 \dots b_n} = \xi^a L_{ab_1 \dots b_n}$ である。式 (A.21) では任意の微分形式 \mathbf{L} に対する Lie 微分の公式

$$\mathcal{L}_\xi \mathbf{L} = \xi \cdot d\mathbf{L} + d(\xi \cdot \mathbf{L}) \quad (\text{A.22})$$

を使った。一方、式 (A.3) から、

$$\hat{\delta}\mathbf{L} = \mathbf{E}(\phi)\mathcal{L}_\xi\phi + d\Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) \quad (\text{A.23})$$

とも書けるので式 (A.21) と式 (A.23) を比べると、

$$d(\Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - \xi \cdot \mathbf{L}) = -\mathbf{E}\mathcal{L}_\xi\phi \quad (\text{A.24})$$

が得られる。Noether current

$$\mathbf{J} = \Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - \xi \cdot \mathbf{L} \quad (\text{A.25})$$

を定義すると、

$$d\mathbf{J} = -\mathbf{E}\mathcal{L}_\xi\phi \stackrel{\text{EOM}}{=} 0 \quad (\text{A.26})$$

となり、運動方程式を使えば保存することが分かる。運動方程式を仮定すると $d\mathbf{J} = 0$ なのだから、このときある Noether charge \mathbf{Q} が存在して

$$\mathbf{J} = d\mathbf{Q} \quad (\text{A.27})$$

と書ける。この \mathbf{J} と \mathbf{Q} にも不定性が存在する。まず $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L} + d\boldsymbol{\mu}$, $\Theta \rightarrow \Theta + \delta\boldsymbol{\mu} + d\mathbf{Y}$ の不定性により、 \mathbf{J} には

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &\rightarrow \mathbf{J} + \mathcal{L}_\xi\boldsymbol{\mu} + d\mathbf{Y}(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - \xi \cdot d\boldsymbol{\mu} \\ &= \mathbf{J} + d(\xi \cdot \boldsymbol{\mu}) + d\mathbf{Y}(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

の不定性がある。ここで、

$$\mathcal{L}_\xi\boldsymbol{\mu} = \xi \cdot d\boldsymbol{\mu} + d(\xi \cdot \boldsymbol{\mu}) \quad (\text{A.29})$$

を用いた。さらに \mathbf{Q} には全微分を加える自由度も入れて

$$\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q} + \xi \cdot \boldsymbol{\mu} + \mathbf{Y}(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) + d\mathbf{Z} \quad (\text{A.30})$$

の不定性があることが分かる。

Proposition

Noether charge は

$$\mathbf{Q} = \mathbf{W}_c(\phi)\xi^c + \mathbf{X}^{cd}\nabla_{[c}\xi_{d]} + \mathbf{Y}(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) + d\mathbf{Z}(\phi, \xi) \quad (\text{A.31})$$

の形に書ける。 $\mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ の選び方は一意ではないが、

$$(\mathbf{X}^{cd})_{c_3 \dots c_n} = -\mathbf{E}_R^{abcd} \epsilon_{abc_3 \dots c_n}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{Z} = 0 \quad (\text{A.32})$$

と選べる。

(\cdot) Θ は式 (A.4) のものを使うと

$$\mathbf{J} = 2\mathbf{E}_R^{bcd} \nabla_d (\nabla_b \xi_c + \nabla_c \xi_b) + \Theta'(\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) - \xi \cdot \mathbf{L} \quad (\text{A.33})$$

となる。 Θ' は $(\delta g, \delta R, \delta \nabla R, \dots)$ の関数だから $\Theta'(\phi, \mathcal{L}_\xi \phi)$ は $(\xi, \nabla \xi)$ の線形関数になる (ξ の二階以上の微分はない)。さらに \mathbf{E}_R^{bcd} の c と d は反対称だから、式 (A.33) で $2\mathbf{E}_R^{bcd} \nabla_d \nabla_c \xi_b = \mathbf{E}_R^{bcd} R_{dcb}{}^e \xi_e$ とできる。よって、 \mathbf{J} のうちで ξ の二階微分は $2\mathbf{E}_R^{bcd} \nabla_d \nabla_b \xi_c$ の項のみで、三階微分以上は現れない。よって、 \mathbf{Q} の表式として

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{W}_c(\phi) \xi^c + \mathbf{X}^{cd} \nabla_{[c} \xi_{d]} \\ &\left((\mathbf{X}^{cd})_{c_3 \dots c_n} \equiv -\mathbf{E}_R^{abcd} \epsilon_{abc_3 \dots c_n} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

が得られる。上式を外微分すれば、 $2\mathbf{E}_R^{bcd} \nabla_d \nabla_b \xi_c$ の項が出てくることが分かる。さらに、 \mathbf{Q} の不定性を考慮に入れると、最終的な \mathbf{Q} の表式は、

$$\mathbf{Q} = \mathbf{W}_c(\phi) \xi^c + \mathbf{X}^{cd} \nabla_{[c} \xi_{d]} + \mathbf{Y}(\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) + d\mathbf{Z}(\phi, \xi) \quad (\text{A.35})$$

である。これは示したかった表式である。□

ξ 方向の diffeomorphism の generator は Cauchy surface を C とすると、

$$H = \int_C \mathbf{J} + (\text{boundary term}) \quad (\text{A.36})$$

と書ける。ここで、(boundary term) は H が微分可能、つまり δH の表面項をキャンセルさせるように入れる。まず \mathbf{J} を変分すると

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{J} &= \delta \Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) - \xi \cdot \delta \mathbf{L} \\ &= \delta \Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) - \xi \cdot (\mathbf{E} \delta \phi + d\Theta(\phi, \delta \phi)) \quad (\because \text{式 (A.3)}) \\ &= \delta \Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) - \mathcal{L}_\xi \Theta(\phi, \delta \phi) + d(\xi \cdot \Theta(\phi, \delta \phi)) \quad (\because \mathbf{E} = \mathbf{0}, \text{式 (A.22)}) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

となる。よって、 H の変分は

$$\delta H = \int_C (\delta \Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) - \mathcal{L}_\xi \Theta(\phi, \delta \phi)) + \int_\infty \xi \cdot \Theta(\phi, \delta \phi) + \delta(\text{boundary term}) \quad (\text{A.38})$$

となる。この式から $\delta(\text{boundary term}) = -\int_\infty \xi \cdot \Theta(\phi, \delta \phi)$ とおくべきであることが分かる。よって

$$\delta H = \delta \int_C \mathbf{J} - \int_\infty \xi \cdot \Theta(\phi, \delta \phi) \quad (\text{A.39})$$

である。 H が存在するためには、ある $(n-2)$ -form \mathbf{B} が存在して、

$$\delta \int_\infty \xi \cdot \mathbf{B} = \int_\infty \xi \cdot \Theta(\phi, \delta \phi) \quad (\text{A.40})$$

が成り立つ必要がある。このとき、

$$\begin{aligned} H &= \int_C \mathbf{J} - \int_\infty \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{B} \\ &= \int_\infty (\mathbf{Q} - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

となる。漸近的平坦な時空を考えよう。 t^a を asymptotic time transration vector(無限遠の自然な時間座標)として、canonical energy

$$\mathcal{E} \equiv \int_\infty (\mathbf{Q}[t] - t \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{A.42})$$

を定義する。この canonical energy は例えば Einstein 重力において漸近的平坦な時空を考えると ADM mass と一致することが確かめられる。さらに φ^a を asymptotic rotation vector として、canonical angular momentum

$$\mathcal{J} \equiv - \int_\infty (\mathbf{Q}[\varphi] - \varphi \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{A.43})$$

を定義する。ここからさらに漸近的に平坦な stationaly ブラックホールを考える。その bifurcation $(n-2)$ -surface を Σ として、 Σ 上で消える Killing ベクトルを

$$\boldsymbol{\xi}^a = t^a + \Omega_H^{(\mu)} \varphi_{(\mu)}^a \quad (\text{A.44})$$

とおく。 $\delta\phi$ も線形運動方程式 $\delta\mathbf{E} = 0$ を満たすとすると、

$$\delta\mathbf{J} = d\delta\mathbf{Q} \quad (\text{A.45})$$

が成り立つ。さらに $\mathcal{L}_\xi\phi = 0$ を満たすことを仮定すると、

$$\delta\Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) = \mathcal{L}_\xi\Theta(\phi, \delta\phi) \quad (\text{A.46})$$

が成立する。これは、例えば $\Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) = \phi\mathcal{L}_\xi\phi$ のとき

$$\delta\Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) = \underbrace{\delta\phi \mathcal{L}_\xi\phi}_{=0} + \phi \underbrace{\delta\mathcal{L}_\xi\phi}_{=\mathcal{L}_\xi\delta\phi} = \mathcal{L}_\xi\Theta(\phi, \delta\phi) \quad (\text{A.47})$$

のように確かめられ、 Θ の表式が一般の場合にも同様な計算ができる。式 (A.45), (A.46) を式 (A.37) に用いると、

$$d\delta\mathbf{Q} = d(\boldsymbol{\xi} \cdot \Theta) \quad (\text{A.48})$$

が成り立つ。この式を C から Σ の内部をくりぬいた領域で積分すると、

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \delta\mathbf{Q} &= \int_\infty (\delta\mathbf{Q}[\boldsymbol{\xi}] - \boldsymbol{\xi} \cdot \Theta) \\ &= \delta\mathcal{E} - \Omega_H^{(\mu)} \delta\mathcal{J}_{(\mu)} \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

が得られる。

Theorem

次のように S を定義する。

$$S = 2\pi \int_{\Sigma} \mathbf{X}^{cd} \epsilon_{cd}. \quad (\text{A.50})$$

ここで、 ϵ は Σ の binormal。つまり、 Σ に垂直な空間の volume element。このとき、

$$\frac{\kappa}{2\pi} \delta S = \delta \mathcal{E} - \Omega_H^{(\mu)} \delta \mathcal{J}_{(\mu)} \quad (\text{A.51})$$

が成り立つ。

(\cdot) 式 (A.31) より、

$$\int_{\Sigma} \delta \mathbf{Q} = \int_{\Sigma} (\delta \mathbf{W}_c(\phi) \xi^c + \delta \mathbf{X}^{cd} \nabla_{[c} \xi_{d]} + \delta \mathbf{Y}(\phi, \mathcal{L}_{\xi} \phi) + d\delta \mathbf{Z}(\phi, \xi)) \quad (\text{A.52})$$

が成り立つ。第 1 項目は Σ 上で $\xi = 0$ より消える。第 4 項目は全微分だから \oint_{Σ} で消える。第 3 項目は

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{Y}(\phi, \mathcal{L}_{\xi} \phi) &= \mathbf{Y}(\phi, \mathcal{L}_{\xi} \delta \phi) = \mathcal{L}_{\xi} \mathbf{Y}(\phi, \delta \phi) \\ &= \xi \cdot d\mathbf{Y} + d(\xi \cdot \mathbf{Y}) \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

となり、これも Σ 上の積分で消える。よって

$$\int_{\Sigma} \delta \mathbf{Q} = \int_{\Sigma} \delta \mathbf{X}^{cd} \nabla_{[c} \xi_{d]} \quad (\text{A.54})$$

となる。次に Σ 上では

$$\nabla_c \xi_d = \kappa \epsilon_{cd} \quad (\text{A.55})$$

が成り立つことを示す。 Σ 上では、 $\xi = 0$ で一定なので、 Σ の接ベクトル t を用いて、 $t^c \nabla_c \xi_d = 0$ が成り立つ。さらに Killing 方程式を用いると、

$$t^c \nabla_c \xi_d = t^c \nabla_d \xi_c = 0 \quad (\text{A.56})$$

が成立する。つまり、 $\nabla_c \xi_d$ は Σ 方向の足を持たない反対称テンソル場である。よって、 Σ 上では、あるスカラー関数 α を用いて

$$\nabla_c \xi_d = \alpha \epsilon_{cd} \quad (\text{A.57})$$

と書ける。両辺を 2 乗すれば、 α が決定できて、 $\alpha = \kappa$ であることが分かる。ゆえに、式 (A.55) が成立する。この式 (A.55) により、

$$\frac{\kappa}{2\pi} \delta S = \int_{\Sigma} \delta \mathbf{Q} = \delta \mathcal{E} - \Omega_H^{(\mu)} \delta \mathcal{J}_{(\mu)} \quad (\text{A.58})$$

が成り立つ。□

式 (A.51) から、 S はブラックホールエントロピーであることが分かる。 \mathbf{X}^{cd} と E_R^{abcd} の定義 (A.32), (A.6) を思い出すと、

$$\begin{aligned} S &= -2\pi \int_{\Sigma} d^{n-2} x \sqrt{h} E_R^{abcd} \epsilon_{ab} \epsilon_{cd} \\ &= -2\pi \int_{\Sigma} d^{n-2} x \sqrt{h} \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta I}{\delta R_{abcd}} \right) \epsilon_{ab} \epsilon_{cd} \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

が得られる。ここで $I = \int \mathbf{L}$ である。これが、Wald の公式である。ここで Σ は bifurcation surface だが、stationaly ブラックホールなら、どのホライズン上で積分しても同じ値が得られることが保障される。

付録B Cardyの公式の導出

ここでは Cardy の公式 [47, 48, 49] を導出する。

Cardy の公式

$$\ln \rho(\Delta, \tilde{\Delta}) \sim 2\pi \left(\sqrt{\frac{c_{\text{eff}} \Delta}{6}} + \sqrt{\frac{\tilde{c}_{\text{eff}} \tilde{\Delta}}{6}} \right) \quad (\text{B.1})$$

$\Delta, \tilde{\Delta} : L_0, \tilde{L}_0$ の固有値

$\rho(\Delta, \tilde{\Delta}) : \Delta, \tilde{\Delta}$ の状態数

$c_{\text{eff}} = c - 24\Delta_0, \tilde{c}_{\text{eff}} = \tilde{c} - 24\tilde{\Delta}_0$

$c, \tilde{c} : \text{central charge}$

$\Delta_0 = \min \Delta, \tilde{\Delta}_0 = \min \tilde{\Delta}$

導出は、

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \text{Tr} e^{2\pi i \tau (L_0 - \Delta_0)} e^{-2\pi i \bar{\tau} (\tilde{L}_0 - \tilde{\Delta}_0)} = \sum_{\Delta, \tilde{\Delta}} \rho(\Delta, \tilde{\Delta}) e^{2\pi i \tau (\Delta - \Delta_0)} e^{-2\pi i \bar{\tau} (\tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}_0)} \quad (\text{B.2})$$

を計算して、 $\rho(\Delta, \tilde{\Delta})$ を求めるという方針で行う。さらに、

$$Z_0(\tau, \bar{\tau}) = \text{Tr} e^{2\pi i \tau (L_0 - \frac{c}{24})} e^{-2\pi i \bar{\tau} (\tilde{L}_0 - \frac{\tilde{c}}{24})} \quad (\text{B.3})$$

を定義する。この Z_0 はトーラス上の CFT の分配関数である。それは次のようにして分かる。CFT のハミルトニアンは $H = L_0 + \tilde{L}_0 - (c + \tilde{c})/24$ で運動量演算子は $P = L_0 - \tilde{L}_0$ である。これを用いると Z_0 の定義式は

$$Z_0(\tau, \bar{\tau}) = \text{Tr} e^{2\pi i \tau_1 P - 2\pi \tau_2 H} \quad (\text{B.4})$$

と書ける。ここで $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ とおいた。これは、図 B.1 のように平行四辺形を同一視して作られたトーラス上の CFT の分配関数に他ならない。トーラス上の CFT は modular 変換

$$\tau \rightarrow \tau + 1, \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau} \quad (\text{B.5})$$

に対し不変である。 $\tau \rightarrow \tau + 1$ の変換は図 B.2 のように同じトーラスの同一視の仕方を変えただけである。 $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$ の変換は図 B.3 のように時間軸と空間軸の役割を変えるような変換である。 Z_0 の modular 不変性を用いると、 Z の modular 変換則は

$$\begin{aligned} Z(\tau, \bar{\tau}) &= \exp \left[2\pi i \left(\frac{c}{24} - \Delta_0 \right) \tau \right] \exp \left[-2\pi i \left(\frac{\tilde{c}}{24} - \tilde{\Delta}_0 \right) \bar{\tau} \right] Z_0(-1/\tau, -1/\bar{\tau}) \\ &= \exp \left[2\pi i \left(\frac{c}{24} - \Delta_0 \right) \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right) \right] \exp \left[-2\pi i \left(\frac{\tilde{c}}{24} - \tilde{\Delta}_0 \right) \left(\bar{\tau} + \frac{1}{\bar{\tau}} \right) \right] \\ &\quad \times Z(-1/\tau, -1/\bar{\tau}) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

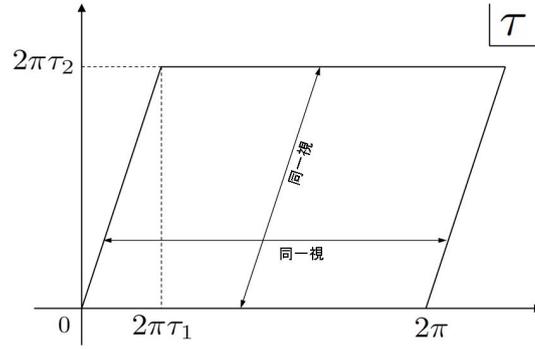


図 B.1: トーラスの構造

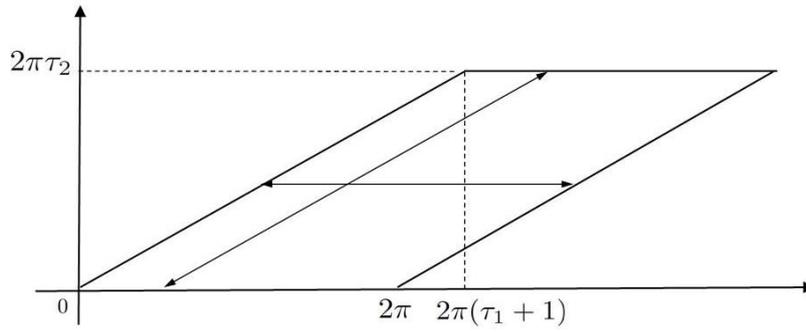


図 B.2: $\tau \rightarrow \tau + 1$ 変換の意味

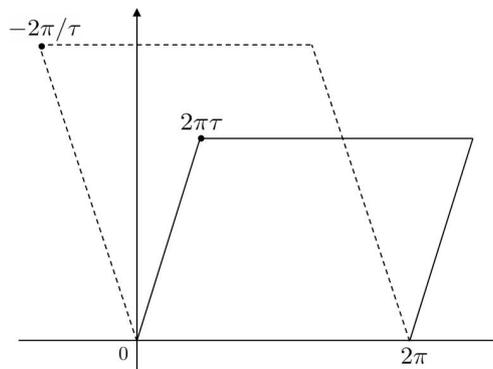


図 B.3: $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$ 変換の意味

となることが分かる。 $q \equiv e^{2\pi i\tau}$ とおくと、 $\rho(\Delta, \tilde{\Delta})$ は式 (B.2) より

$$\rho(\Delta, \tilde{\Delta}) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \frac{dq}{q^{\Delta-\Delta_0+1}} \frac{d\bar{q}}{\bar{q}^{\tilde{\Delta}-\tilde{\Delta}_0+1}} Z(q, \bar{q}) \quad (\text{B.7})$$

から得られる。ここから、簡単のため $\tilde{\Delta}$ 依存性は考えないことにしよう (Δ だけですべて計算したあとに $\tilde{\Delta}$ を復活させる)。このとき、

$$\rho(\Delta) = \int d\tau e^{-2\pi i(\Delta-\Delta_0)\tau} \exp \left[2\pi i \left(\frac{c}{24} - \Delta_0 \right) \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right) \right] Z(-1/\tau) \quad (\text{B.8})$$

となる。これを鞍点法を用いて計算する。 $\Delta \gg c, \Delta_0$ として鞍点を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(-2\pi i(\Delta - \Delta_0)\tau + 2\pi i \left(\frac{c}{24} - \Delta_0 \right) \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right) \right) &= 0 \\ \Rightarrow \tau &\simeq i\sqrt{\frac{c_{\text{eff}}}{24\Delta}} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

となる。鞍点は $\tau \simeq i\sqrt{c_{\text{eff}}/24\Delta} \ll i$ なので、 $\tau = i\epsilon$ とおいて、 $Z(-1/\tau)$ の $\epsilon \ll 1$ での振る舞いを見てみよう。

$$Z(i/\epsilon) = \sum_{\Delta} \rho(\Delta) e^{-2\pi(\Delta-\Delta_0)/\epsilon} \sim \rho(\Delta_0) \quad (\text{B.10})$$

となるので、鞍点近傍で $Z(-1/\tau) \sim \text{const}$ となりほとんど変化しないことが分かる。よって、

$$\rho(\Delta) \sim \exp \left(2\pi\sqrt{\frac{c\Delta_{\text{eff}}}{6}} \right) Z(i\infty) \quad (\text{B.11})$$

となる。さらに、 τ の依存性も考慮すると

$$\ln \rho(\Delta, \tilde{\Delta}) \sim 2\pi \left(\sqrt{\frac{c_{\text{eff}}\Delta}{6}} + \sqrt{\frac{\tilde{c}_{\text{eff}}\tilde{\Delta}}{6}} \right) \quad (\text{B.12})$$

が得られる。

付録C トレースアノマリーの計算

C.1 Weyl 対称性とその量子的破れ

2つの2次元スカラー場の作用

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} (\nabla X)^2, \quad (\text{C.1.1})$$

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} e^{-2\phi} (\nabla X)^2 \quad (\text{C.1.2})$$

を考える。作用 (C.1.2) では、Lagrangian に dilaton $e^{-2\phi}$ がかかっている。この作用は、高次元のスカラー場の作用を球対称性を仮定して dimensional reduction したときに現れる表式である。ここでは、Euclidean 作用を用いることにする。二つの作用 (C.1.1), (C.1.2) にはゲージ対称性が存在する。作用 (C.1.1) は

$$g_{\mu\nu} \rightarrow e^{-2\alpha(x)} g_{\mu\nu}, \quad X \rightarrow X, \quad (\text{C.1.3})$$

作用 (C.1.2) は

$$g_{\mu\nu} \rightarrow e^{-2\alpha(x)} g_{\mu\nu}, \quad X \rightarrow X, \quad \phi \rightarrow \phi \quad (\text{C.1.4})$$

のゲージ変換で不変である。このゲージ変換を Weyl 変換という。古典作用を微小 Weyl 変換すると、

$$0 = \delta S[\phi, g] = \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = - \int d^2x \sqrt{g} T^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \alpha(x) \quad (\text{C.1.5})$$

となり、 $T^\mu_\mu = 0$ が得られる。このように、理論が Weyl 不変であることとエネルギー運動量テンソルのトレースがゼロであることは同値である。しかしこの対称性は量子化の際に破れてしまうことが分かる。その結果、量子的なエネルギー運動量テンソルのトレースは0でない値を与える。この Weyl 対称性の量子的破れをトレースアノマリーという。次節からこのトレースアノマリーを導出していくが、先に結果を書いておくと、作用 (C.1.1) のトレースアノマリーは、

$$T^\mu_\mu = \frac{1}{24\pi} R, \quad (\text{C.1.6})$$

作用 (C.1.2) のトレースアノマリーは、

$$T^\mu_\mu = \frac{1}{24\pi} [R - (\nabla f(\phi))^2] \quad (\text{C.1.7})$$

となる。 $f(\phi)$ は ϕ の任意関数で量子化の際に現れる不定性を表している。実際は作用 (C.1.2) のトレースアノマリーを計算して $\phi = 0$ とおけば、作用 (C.1.1) のトレースアノマリーが得られるのであるが、分かりやすさのために、まず作用 (C.1.1) のトレースアノマリーを計算してから作用 (C.1.2) のトレースアノマリーを計算する。

C.2 トレースアノマリー (dilaton がないケース)

まず、作用 (C.1.1)

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} (\nabla X)^2 \quad (\text{C.2.1})$$

のトレースアノマリーを計算する。方法は Fujikawa method [50, 51] を用いる。分配関数は、

$$Z[g] = \int \mathcal{D}X \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} (\nabla X)^2\right) \quad (\text{C.2.2})$$

である。この分配関数を微小 Weyl 変換すると、

$$\begin{aligned} \delta Z[g] &= Z[e^{-2\alpha}g] - Z[g] \\ &= \int \mathcal{D}X' e^{-S[X',g']} - Z[g] \\ &= \int \mathcal{D}X J e^{-S[X,g]} - Z[g] \\ &= \int \mathcal{D}X (J - 1) e^{-S[X,g]} \\ &\simeq \int \mathcal{D}X \ln J e^{-S[X,g]} \end{aligned} \quad (\text{C.2.3})$$

となる。 J はヤコビアンである。上式の 2 行目から 3 行目の変換では古典作用の Weyl 不変性を用いた。上の変分はもしアノマリーがないとすると 0 のなるべき量である。よって、ヤコビアン J にアノマリーの情報が含まれていることが分かる。 J を計算していこう。まず内積を、

$$(f, g) \equiv \int d^2x \sqrt{g} f^* g \quad (\text{C.2.4})$$

で定義する。関数空間上の“計量”は

$$\|\delta X\|^2 = (\delta X, \delta X) \quad (\text{C.2.5})$$

で表される。この内積の正規直交基底 $\{\varphi_n\}$ ($(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$) を用いて、 $\delta X = \sum_n \delta c_n \varphi_n$ のように展開すると、

$$\|\delta X\|^2 = \sum_n |\delta c_n|^2 \quad (\text{C.2.6})$$

となり、ピタゴラスの定理が成り立つことが分かる。このことから、経路積分の測度を自然に

$$\mathcal{D}X = \prod_n dc_n \quad (\text{C.2.7})$$

と定義することができる。Weyl 変換 (C.1.3) で X は不変である。このことから $\mathcal{D}X$ も Weyl 不変ではないか、と考えることが出来そうである。しかし、この考えは間違いである。なぜなら、 X は Weyl 不変でも内積の定義 (C.2.4) は Weyl 不変でない。ゆえに、正規直交系 $\{\varphi_n\}$ が Weyl 変換で変わる。Weyl 変換後の正規直交系を $\{\varphi'_n\}$ とすると、

$$\delta_{nm} = \int d^2x \sqrt{g'} \varphi_n'^* \varphi_m' = \int d^2x \sqrt{g} e^{-2\alpha} \varphi_n'^* \varphi_m' \quad (\text{C.2.8})$$

が成り立つ。一方、

$$\delta_{nm} = \int d^2x \sqrt{g} \varphi_n^* \varphi_m \quad (\text{C.2.9})$$

なので、 φ_n と φ'_n の関係は、

$$\varphi'_n = e^\alpha \varphi_n = (1 + \alpha) \varphi_n \quad (\text{C.2.10})$$

となる。よって、 X を φ_n と φ'_n それぞれで展開すると、

$$\begin{aligned} X &= \sum_n c_n \varphi_n = \sum_n c'_n \varphi'_n \\ &= \sum_n c'_n (1 + \alpha) \varphi_n \\ &= \sum_n (c'_n + \alpha c_n) \varphi_n \quad (\because c'_n = c_n + \mathcal{O}(\alpha)) \\ &\Rightarrow \sum_n c'_n \varphi_n = \sum_n c_n (1 - \alpha) \varphi_n \end{aligned} \quad (\text{C.2.11})$$

となる。この式より、 c_n と c'_n の変換則

$$c'_n = \sum_m (\varphi_m, (1 - \alpha) \varphi_m) c_m = \sum_m (\delta_{nm} - \alpha_{nm}) c_m \quad (\text{C.2.12})$$

が得られる。ここで、 $\alpha_{nm} \equiv (\varphi_n, \alpha \varphi_m)$ である。よって、経路積分の測度の変換則は

$$\begin{aligned} \mathcal{D}X &= \prod_n dc'_n = \prod_n dc_n \det(\delta_{nm} - \alpha_{nm}) \\ &= \mathcal{D}X \exp\left(-\sum_n \alpha_{nn}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.2.13})$$

である。上式の最終表式では、公式

$$\det(1 + \varepsilon) \simeq \exp(\text{tr } \varepsilon) \quad (\text{C.2.14})$$

を用いた。 ε は“微小”な行列である。式 (C.2.13) より、ヤコビアン J が読み取れて、

$$\ln J = -\sum_n \alpha_{nn} = -\sum_n \int d^2x \sqrt{g} \alpha(x) \varphi_n^* \varphi_n \quad (\text{C.2.15})$$

となる。この式を計算したいが $\sum_n \varphi_n^* \varphi_n = \delta(0)$ となってしまうので、正則化が必要になる。一般座標変換に対し不変な演算子 \square を用いて、

$$\sum_n \varphi_n^* \varphi_n \rightarrow \sum_n \varphi_n^* \exp(\square/M^2) \varphi_n \quad (\text{C.2.16})$$

のように正則化しよう。 M はあとで $M \rightarrow \infty$ とする。このとき、ヤコビアンは、

$$\begin{aligned} \ln J &= -\sum_n \int d^2x \sqrt{g} \alpha(x) \varphi_n^* \exp(\square/M^2) \varphi_n \\ &= -\int d^2x \sqrt{g} \alpha(x) \langle x | \exp(\square/M^2) | x \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.2.17})$$

と書くことができる。 $\langle x | \exp(\square/M^2) | x \rangle$ を計算しなければならない。ここで conformal gauge

$$g_{\mu\nu} = e^{2\sigma} \delta_{\mu\nu} \quad (\text{C.2.18})$$

をとる。このとき、

$$\square = e^{-2\sigma} \partial^2 \quad (\text{C.2.19})$$

である。ここで、 $\partial^2 = \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ である。ここから、足を下同士でつづした場合は $\delta_{\mu\nu}$ での contraction であるとする。関数空間の基底を

$$\varphi_k = e^{-\sigma} e^{ikx} \quad (\text{C.2.20})$$

にとる。これは正規直交系である。なぜなら、

$$\int d^2x \sqrt{g} \varphi_k^* \varphi_{k'} = \int d^2x e^{2\sigma} e^{-\sigma} e^{-ikx} e^{-\sigma} e^{ik'x} = (2\pi)^2 \delta(k - k') \quad (\text{C.2.21})$$

となるからである。この基底を用いると、

$$\begin{aligned} & \langle x | \exp(\square/M^2) | x \rangle \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-\sigma} e^{-ikx} \exp(\square/M^2) e^{-\sigma} e^{ikx} \\ &= e^{-2\sigma} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \exp \left[\frac{1}{M^2} e^\sigma e^{-ikx} e^{-2\sigma} \partial^2 e^{-\sigma} e^{ikx} \right] \\ & \quad (\because B^{-1} e^A B = e^{B^{-1} A B} \quad (A, B : \text{行列})) \\ &= e^{-2\sigma} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \exp \left[\frac{1}{M^2} e^{-ikx} e^{-\sigma} \partial^2 e^{-\sigma} e^{ikx} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.2.22})$$

となる。ここから、まぎらわしくなるので2種類の微分 $\partial, \vec{\partial}$ を定義しておく。 ∂ は右隣の関数のみたたたく。つまり、

$$\partial f g = (\partial f) g \quad (\text{C.2.23})$$

である。 $\vec{\partial}$ は右にある関数すべてをたたたく。つまり、

$$\vec{\partial} f g = (\partial f) g + f (\partial g) + f g \vec{\partial} \quad (\text{C.2.24})$$

である。この先しばしば用いる便利な公式

$$\vec{\partial}_\mu e^{f(x)} = e^{f(x)} (\vec{\partial}_\mu + \partial_\mu f(x)) \quad (\text{C.2.25})$$

を用いると、式 (C.2.22) は、

$$\begin{aligned} & e^{-2\sigma} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \exp \left[\frac{1}{M^2} e^{-\sigma} (\vec{\partial}_\mu + ik_\mu)^2 e^{-\sigma} \right] \\ &= e^{-2\sigma} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \exp \left[\frac{1}{M^2} e^{-\sigma} (-k^2 + 2ik_\mu \vec{\partial}_\mu + \vec{\partial}^2) e^{-\sigma} \right] \\ &= e^{-2\sigma} M^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \exp \left[e^{-\sigma} (-k^2 + \frac{2i}{M} k_\mu \vec{\partial}_\mu + \frac{1}{M^2} \vec{\partial}^2) e^{-\sigma} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.2.26})$$

となる。最後の等式では、 k/M を新たに k と再定義した。ここで、

$$\begin{aligned} H_0 &\equiv -k^2 e^{-2\sigma} \\ H_I &\equiv e^{-\sigma} \left(\frac{2i}{M} k_\mu \vec{\partial}_\mu + \frac{1}{M^2} \vec{\partial}^2 \right) e^{-\sigma} \end{aligned} \quad (\text{C.2.27})$$

と定義すると

$$\langle x | \exp(\square/M^2) | x \rangle = e^{-2\sigma} M^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{H_0 + H_I} \quad (\text{C.2.28})$$

となる。量子力学の摂動論の手法に習うと、

$$\begin{aligned} e^{H_0 + H_I} &= e^{H_0} \left\{ 1 + \int_0^1 dt H_I(t) + \int_0^1 dt H_I(t) \int_0^t dt' H_I(t') \right\} \\ (H_I(t) &\equiv e^{-H_0 t} H_I e^{H_0 t}) \end{aligned} \quad (\text{C.2.29})$$

と展開することができる。この表式を用いて $e^{H_0 + H_I}$ を M^{-2} のオーダーまで展開する。 H_I を式変形すると、

$$H_I = \frac{2i}{M} e^{-2\sigma} k_\mu (\vec{\partial}_\mu - \partial_\mu \sigma) + \frac{1}{M^2} e^{-2\sigma} (\vec{\partial}^2 - 2\partial_\mu \sigma \vec{\partial}_\mu - \partial^2 \sigma + (\partial\sigma)^2) \quad (\text{C.2.30})$$

となり、 $H_I(t)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} H_I(t) &= \frac{2i}{M} e^{-2\sigma} k_\mu (\vec{\partial}_\mu - \partial_\mu \sigma + 2tk^2 \partial_\mu \sigma e^{-2\sigma}) \\ &\quad + \frac{1}{M^2} e^{-2\sigma} ((\vec{\partial} + 2tk^2 \partial_\mu \sigma e^{-2\sigma})^2 \\ &\quad \quad - 2\partial_\mu \sigma (\vec{\partial}_\mu + 2tk^2 \partial_\mu \sigma e^{-2\sigma}) - \partial^2 \sigma + (\partial\sigma)^2) \\ &= \frac{2i}{M} e^{-2\sigma} k_\mu (\vec{\partial}_\mu - \partial_\mu \sigma + 2tk^2 \partial_\mu \sigma e^{-2\sigma}) \\ &\quad + \frac{1}{M^2} e^{-2\sigma} [\vec{\partial}^2 + 4tk^2 \partial_\mu \sigma e^{-2\sigma} \vec{\partial}_\mu - 2\partial_\mu \sigma \vec{\partial}_\mu \\ &\quad \quad + 2tk^2 (\partial^2 \sigma - 4(\partial\sigma)^2) e^{-2\sigma} + 4t^2 (k^2)^2 (\partial\sigma)^2 e^{-4\sigma} - \partial^2 \sigma + (\partial\sigma)^2] \end{aligned} \quad (\text{C.2.31})$$

である。よって、

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dt H_I(t) \text{ の } k \text{ の偶数次の項} \\ &= \frac{1}{M^2} e^{-2\sigma} [\vec{\partial}^2 + 2k^2 \partial_\mu \sigma e^{-2\sigma} \vec{\partial}_\mu - 2\partial_\mu \sigma \vec{\partial}_\mu \\ &\quad \quad + k^2 (\partial^2 \sigma - 4(\partial\sigma)^2) e^{-2\sigma} + \frac{4}{3} (k^2)^2 (\partial\sigma)^2 e^{-4\sigma} - \partial^2 \sigma + (\partial\sigma)^2] \end{aligned} \quad (\text{C.2.32})$$

となる。 k 奇数次の項は、式 (C.2.28) の k 積分のときに消えてしまうので考えなかった。また、

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dt H_I(t) \int_0^t dt' H_I(t') \\ &= \int_0^1 dt \frac{-4}{M^2} k_\mu k_\nu e^{-2\sigma} t (\vec{\partial}_\mu - \partial_\mu \sigma + 2tk^2 \partial_\mu \sigma e^{-2\sigma}) \\ &\quad \quad \times e^{-2\sigma} (\vec{\partial}_\nu - \partial_\nu \sigma + tk^2 \partial_\nu \sigma e^{-2\sigma}) \end{aligned} \quad (\text{C.2.33})$$

となる。あとで上の表式に $e^{-k^2 e^{-2\sigma}}$ をかけてからガウス積分を行うので、 $k_\mu k_\nu \rightarrow (1/2)k^2 \delta_{\mu\nu}$ としてしまうと、

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dt \frac{-2}{M^2} k^2 e^{-4\sigma} t (\vec{\partial}_\mu - 3\partial_\mu \sigma + 2tk^2 \partial_\mu \sigma e^{-2\sigma}) (\vec{\partial}_\mu - \partial_\mu \sigma + tk^2 \partial_\mu \sigma e^{-2\sigma}) \\ &= \frac{-2}{M^2} k^2 e^{-4\sigma} \left[\frac{1}{2} \vec{\partial}^2 + (-2\partial_\mu \sigma + k^2 \partial_\mu \sigma e^{-2\sigma}) \vec{\partial}_\mu - \frac{1}{2} \partial^2 \sigma \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{3} k^2 (\partial^2 \sigma - 2(\partial\sigma)^2) e^{-2\sigma} + \frac{3}{2} (\partial\sigma)^2 - \frac{5}{3} k^2 (\partial\sigma)^2 e^{-2\sigma} + \frac{1}{2} (k^2)^2 (\partial\sigma)^2 e^{-4\sigma} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.2.34})$$

となる。次にガウス積分を実行していこう。そのための公式は、

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{-k^2 e^{-2\sigma}} &= \frac{1}{4\pi} e^{2\sigma} \\ \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{-k^2 e^{-2\sigma}} k^2 &= \frac{1}{4\pi} e^{4\sigma} \\ \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{-k^2 e^{-2\sigma}} (k^2)^2 &= \frac{1}{2\pi} e^{6\sigma} \\ \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{-k^2 e^{-2\sigma}} (k^2)^3 &= \frac{3}{2\pi} e^{8\sigma} \end{aligned} \quad (\text{C.2.35})$$

である。これらを用いて計算していくと、

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{H_0} &= \frac{1}{4\pi} e^{2\sigma} \\ \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{H_0} \int_0^1 dt H_I(t) &= \frac{1}{\pi M^2} \left[\frac{1}{4} \vec{\partial}^2 - \frac{1}{12} (\partial\sigma)^2 \right] \\ \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{H_0} \int_0^1 dt H_I(t) \int_0^t dt' H_I(t') &= \frac{1}{\pi M^2} \left[-\frac{1}{4} \vec{\partial}^2 - \frac{1}{12} \partial^2 \sigma + \frac{1}{12} (\partial\sigma)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.2.36})$$

となることが計算できる。よって、

$$\langle x | \exp(\square/M^2) | x \rangle = \frac{1}{4\pi} \left[M^2 - \frac{1}{3} e^{-2\sigma} \partial^2 \sigma \right] \quad (\text{C.2.37})$$

が得られる。ここで $R = -2e^{-2\sigma} \partial^2 \sigma$ であることを用いれば、

$$\langle x | \exp(\square/M^2) | x \rangle = \frac{M^2}{4\pi} + \frac{R}{24\pi} \quad (\text{C.2.38})$$

と書ける。よって、求めたかったヤコビアンは、

$$\ln J = - \int d^2 x \sqrt{g} \alpha(x) \left[\frac{M^2}{4\pi} + \frac{R}{24\pi} \right] \quad (\text{C.2.39})$$

となる。この式を、式 (C.2.3) に用いると分配関数の Weyl 変換が分かって、

$$\delta Z[g] = -Z[g] \int d^2 x \sqrt{g} \alpha(x) \left[\frac{M^2}{4\pi} + \frac{R}{24\pi} \right] \quad (\text{C.2.40})$$

となる。一方、 $\delta Z[g]$ はエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ を用いて、

$$\delta Z[g] = -Z[g] \int d^2x \sqrt{g} \alpha(x) T_\mu^\mu \quad (\text{C.2.41})$$

とも書ける。この2式を見比べると、 α は任意なので、

$$T_\mu^\mu = \frac{M^2}{4\pi} + \frac{R}{24\pi} \quad (\text{C.2.42})$$

が得られる。この式の第1項目は発散している。しかし、この項は、元の作用 (C.1.1) に local counter term をうまく入れれば打ち消せる。実際、元の作用に宇宙項を加えて、

$$S'[X, g] = S[X, g] - \int d^2x \sqrt{g} \frac{M^2}{8\pi} \quad (\text{C.2.43})$$

としておくと、エネルギー運動量テンソルは、

$$T'_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \ln Z'[g] = T_{\mu\nu} - \frac{M^2}{8\pi} g_{\mu\nu} \quad (\text{C.2.44})$$

となり、このトレースとして、

$$T'^\mu{}_\mu = T_\mu^\mu - \frac{M^2}{4\pi} = \frac{R}{24\pi} \quad (\text{C.2.45})$$

が得られ、トレースアノマリーの発散項をキャンセルすることができる。よって、作用 (C.1.1) のトレースアノマリーは、

$$T_\mu^\mu = \frac{1}{24\pi} R \quad (\text{C.2.46})$$

で与えられることが分かった。

C.3 Louville action

このトレースアノマリーから、作用 (C.1.1) の effective action を計算することもできる。式 (C.2.41) で、conformal gauge をとると、

$$\delta Z[e^{2\sigma} \delta] = Z[e^{2\sigma} \delta] \int d^2x \sqrt{g} T_\mu^\mu \delta\sigma = -\frac{1}{12\pi} Z[e^{2\sigma} \delta] \int d^2x \partial^2 \sigma \delta\sigma \quad (\text{C.3.1})$$

となる。上式で $\alpha = -\delta\sigma$ を用いた。式 (C.3.1) は、汎関数微分方程式である。この方程式の解は、

$$Z[e^{2\sigma} \delta] = Z[\delta] \exp\left(\frac{1}{24\pi} \int d^2x (\partial\sigma)^2\right) \quad (\text{C.3.2})$$

であることが確かめられる。よって、effective action $W = -\ln Z$ は、

$$W = -\frac{1}{24\pi} \int d^2x (\partial\sigma)^2 \quad (\text{C.3.3})$$

となる。この表式は、共変的に、

$$W = \frac{1}{96\pi} \int d^2x \sqrt{g} R \frac{1}{\square} R \quad (\text{C.3.4})$$

と書くことができる。なぜなら、

$$\begin{aligned}
& \int d^2x \sqrt{g} R \frac{1}{\square} R \\
&= 4 \int d^2x \partial^2 \sigma \frac{1}{e^{-2\sigma} \partial^2} (e^{-2\sigma} \partial^2 \sigma) \\
&= 4 \int d^2x \sigma \partial^2 \sigma = -4 \int d^2x (\partial \sigma)^2
\end{aligned} \tag{C.3.5}$$

が成り立つからである。Lorentzian で書くと、

$$W = -\frac{1}{96\pi} \int d^2x \sqrt{-g} R \frac{1}{\square} R \tag{C.3.6}$$

となる (今の convention では、Euclidean 作用と Lorentzian 作用の符合は反転することに注意)。この effective action を Liouville action という。ここで、Liouville action (C.3.6) には繰り込み可能で ϕ に依存しないような finite term を付け加える不定性があることに留意しておくべきである。なぜなら、トレースアノマリーの発散項をキャンセルさせるために、元の作用 (C.1.1) に local counter term を加えた。その際に、繰り込み可能で X に依存しないような finite term を付け加える不定性が出てきてしまうからである (それを付け加えた例が 4.3 節の RST モデルである)。

C.4 トレースアノマリー (dilaton があるケース)

次に、作用 (C.1.2)

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} e^{-2\phi} (\nabla X)^2 \tag{C.4.1}$$

のトレースアノマリーを計算する。dilaton がない場合と同様に、Weyl 変換 (C.1.4) のヤコビアンを計算すればよい。まず、内積の定義であるがこれには不定性がある。なぜなら、

$$(f, g) \equiv \int d^2x \sqrt{g} e^{2A(\phi)} f^* g \tag{C.4.2}$$

のように、 ϕ の任意関数 $e^{2A(\phi)}$ をはさんで定義しても良いからである。この任意性を残して、内積は式 (C.4.2) で定義しておく。この内積の正規直交基底 $\{\varphi_n\}$ ($(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$) を用いて、 $X = \sum_n c_n \varphi_n$ のように展開したとき、経路積分の測度は、

$$\mathcal{D}X = \prod_n dc_n \tag{C.4.3}$$

と定義される。内積の定義 (C.4.2) は Weyl 不変でない。ゆえに、正規直交系 $\{\varphi_n\}$ が Weyl 変換で変わる。Weyl 変換後の正規直交系を $\{\varphi'_n\}$ とすると、

$$\varphi'_n = (1 + \alpha) \varphi_n \tag{C.4.4}$$

となる。ここから、 c_n と c'_n の変換則

$$c'_n = \sum_m (\varphi_m, (1 - \alpha) \varphi_m) c_m = \sum_m (\delta_{nm} - \alpha_{nm}) c_m \tag{C.4.5}$$

が得られる。ここで、 $\alpha_{nm} \equiv (\varphi_n, \alpha\varphi_m)$ である。よって、経路積分の測度の変換則は

$$\begin{aligned}\mathcal{D}X &= \prod_n dc'_n = \prod_n dc_n \det(\delta_{nm} - \alpha_{nm}) \\ &= \mathcal{D}X \exp\left(-\sum_n \alpha_{nn}\right)\end{aligned}\tag{C.4.6}$$

である。式 (C.4.6) より、ヤコビアン J が読み取れて、

$$\ln J = -\sum_n \alpha_{nn} = -\sum_n \int d^2x \sqrt{g} e^{2A(\phi)} \alpha(x) \varphi_n^* \varphi_n \tag{C.4.7}$$

となる。しかし、上式で $\sum_n \varphi_n^* \varphi_n = \delta(0)$ となってしまうので正則化が必要である。dilaton がない場合は、一般座標変換に対し不変な演算子 \square を用いて $\sum_n \varphi_n^* \varphi_n \rightarrow \sum_n \varphi_n^* \exp(\square/M^2) \varphi_n$ と正則化した。では、今は正則化の関数として何を選ぶべきだろうか。ここでも、不定性が出てきてしまう。内積 (C.4.2) のもとでエルミートな一般座標変換に対し不変な演算子は、一般に

$$H = e^{2B(\phi)} \nabla_\mu e^{-2C(\phi)} \nabla^\mu e^{2A(\phi)+2B(\phi)} \tag{C.4.8}$$

と書くことができる。 $B(\phi)$, $C(\phi)$ は ϕ の任意関数である。この演算子で正則化すると、

$$\begin{aligned}\ln J &= -\sum_n \int d^2x \sqrt{g} e^{2A(\phi)} \alpha(x) \varphi_n^* e^{H/M^2} \varphi_n \\ &= -\int d^2x \sqrt{g} e^{2A(\phi)} \alpha(x) \langle x | e^{H/M^2} | x \rangle\end{aligned}\tag{C.4.9}$$

と書くことができる。 $\langle x | e^{H/M^2} | x \rangle$ を計算していこう。ここで conformal gauge

$$g_{\mu\nu} = e^{2\sigma} \delta_{\mu\nu} \tag{C.4.10}$$

をとると、

$$H = e^{-2\sigma+2B(\phi)} \partial_\mu e^{-2C(\phi)} \partial_\mu e^{2A(\phi)+2B(\phi)} \tag{C.4.11}$$

となる。さらに、基底を

$$\varphi_k = e^{-\sigma-A(\phi)} e^{ikx} \tag{C.4.12}$$

ととる。これは正規直交系であることが確かめられる。この基底を用いると、

$$\begin{aligned}&\langle x | e^{H/M^2} | x \rangle \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-\sigma-A(\phi)} e^{-ikx} e^{H/M^2} e^{-\sigma-A(\phi)} e^{ikx} \\ &= e^{-2\sigma-2A(\phi)} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \exp \left[\frac{1}{M^2} e^{\sigma+A(\phi)} e^{-ikx} e^{-2\sigma+2B(\phi)} \partial_\mu e^{-2C(\phi)} \partial_\mu e^{2A(\phi)+2B(\phi)} e^{-\sigma-A(\phi)} e^{ikx} \right] \\ &\quad (\because B^{-1} e^A B = e^{B^{-1}AB} \text{ (} A, B \text{ : 行列)}) \\ &= e^{-2\sigma-2A(\phi)} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \exp \left[\frac{1}{M^2} e^{-ikx} e^{-\sigma+A(\phi)+2B(\phi)} \partial_\mu e^{-2C(\phi)} \partial_\mu e^{-\sigma+A(\phi)+2B(\phi)} e^{ikx} \right]\end{aligned}\tag{C.4.13}$$

となる。ここで、表式を簡単にするために、

$$\begin{aligned}\rho &\equiv \sigma - A(\phi) - 2B(\phi) \\ \chi &\equiv C(\phi)\end{aligned}\tag{C.4.14}$$

と定義する。また、dilaton がない場合の計算で導入した $\partial, \vec{\partial}$ を使うと、式 (C.4.13) は、

$$\begin{aligned}& e^{-2\sigma-2A(\phi)} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \exp \left[\frac{1}{M^2} e^{-ikx} e^{-\rho} \vec{\partial}_\mu e^{-2\chi} \vec{\partial}_\mu e^{-\rho} e^{ikx} \right] \\ &= e^{-2\sigma-2A(\phi)} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \exp \left[\frac{1}{M^2} e^{-\rho} (\vec{\partial}_\mu + ik_\mu) e^{-2\chi} (\vec{\partial}_\mu + ik_\mu) e^{-\rho} \right] \\ &= e^{-2\sigma-2A(\phi)} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \exp \left[\frac{1}{M^2} e^{-\rho} \{ -k^2 + ik_\mu (\vec{\partial}_\mu e^{-2\chi} + e^{-2\chi} \vec{\partial}_\mu) + \vec{\partial}_\mu e^{-2\chi} \vec{\partial}_\mu \} e^{-\rho} \right] \\ &= e^{-2\sigma-2A(\phi)} M^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \exp \left[e^{-\rho} \left\{ -k^2 + \frac{i}{M} k_\mu (\vec{\partial}_\mu e^{-2\chi} + e^{-2\chi} \vec{\partial}_\mu) + \frac{1}{M^2} \vec{\partial}_\mu e^{-2\chi} \vec{\partial}_\mu \right\} e^{-\rho} \right]\end{aligned}\tag{C.4.15}$$

となる。最後の等式では、 k/M を新たに k と再定義した。ここで、

$$\begin{aligned}H_0 &\equiv -k^2 e^{-2\rho-2\chi} \\ H_I &\equiv \frac{i}{M} k_\mu e^{-\rho} (\vec{\partial}_\mu e^{-2\chi} + e^{-2\chi} \vec{\partial}_\mu) e^{-\rho} + \frac{1}{M^2} e^{-\rho} \vec{\partial}_\mu e^{-2\chi} \vec{\partial}_\mu e^{-\rho}\end{aligned}\tag{C.4.16}$$

と定義すると

$$\langle x | e^{H/M^2} | x \rangle = e^{-2\sigma-2A(\phi)} M^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{H_0+H_I}\tag{C.4.17}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}e^{H_0+H_I} &= e^{H_0} \left\{ 1 + \int_0^1 dt H_I(t) + \int_0^1 dt H_I(t) \int_0^t dt' H_I(t') \right\} \\ (H_I(t) &\equiv e^{-H_0 t} H_I e^{H_0 t})\end{aligned}\tag{C.4.18}$$

と展開することができるので、この表式を用いて $e^{H_0+H_I}$ を M^{-2} まで展開する。 H_I を式変形すると、

$$\begin{aligned}H_I &= \frac{2i}{M} e^{-2\rho-2\chi} k_\mu (\vec{\partial}_\mu - \partial_\mu \rho - \partial_\mu \chi) \\ &\quad + \frac{1}{M^2} e^{-2\rho-2\chi} (\vec{\partial}^2 - 2(\partial_\mu \rho + \partial_\mu \chi) \vec{\partial}_\mu - \partial^2 \rho + (\partial \rho)^2 + 2\partial \chi \cdot \partial \rho)\end{aligned}\tag{C.4.19}$$

となる。ここで、

$$\lambda \equiv \rho + \chi\tag{C.4.20}$$

を導入すると、 H_0, H_I が簡単になって、

$$\begin{aligned}H_0 &= -k^2 e^{-2\lambda} \\ H_I &= \frac{2i}{M} e^{-2\lambda} k_\mu (\vec{\partial}_\mu - \partial_\mu \lambda) \\ &\quad + \frac{1}{M^2} e^{-2\lambda} (\vec{\partial}^2 - 2\partial_\mu \lambda \vec{\partial}_\mu - \partial^2 \lambda + (\partial \lambda)^2 + \partial^2 \chi - (\partial \chi)^2)\end{aligned}\tag{C.4.21}$$

と書ける。ここで、上式と式 (C.2.27), (C.2.30) を見比べてみる。式 (C.2.27), (C.2.30) で $\sigma = \lambda$ とおいて、

$$H_I \rightarrow H_I + \Delta H_I \quad \left(\Delta H_I \equiv \frac{1}{M^2} e^{-2\lambda} (\partial^2 \chi - (\partial \chi)^2) \right) \quad (\text{C.4.22})$$

と書き換えると、式 (C.4.21) になることが分かる。よって、この新しいタームの部分だけ計算すれば十分である。このタームは M^{-2} のオーダーなので、 $\int_0^1 dt H_I(t) \int_0^t dt' H_I(t')$ の計算には効いてこない。しかし、 $\int_0^1 dt H_I(t)$ の計算には、

$$\Delta \int_0^1 dt H_I(t) = \Delta H_I \quad (\text{C.4.23})$$

の補正が入る。また、ガウス積分で

$$\int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{H_0} \Delta H_I = \frac{1}{4\pi M^2} (\partial^2 \chi - (\partial \chi)^2) \quad (\text{C.4.24})$$

となるので、式 (C.2.36) は、

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{H_0} &= \frac{1}{4\pi} e^{2\lambda} \\ \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{H_0} \int_0^1 dt H_I(t) &= \frac{1}{\pi M^2} \left[\frac{1}{4} \vec{\partial}^2 - \frac{1}{12} (\partial \lambda)^2 + \frac{1}{4} (\partial^2 \chi - (\partial \chi)^2) \right] \\ \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{H_0} \int_0^1 dt H_I(t) \int_0^t dt' H_I(t') &= \frac{1}{\pi M^2} \left[-\frac{1}{4} \vec{\partial}^2 - \frac{1}{12} \partial^2 \lambda + \frac{1}{12} (\partial \lambda)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.4.25})$$

のように書き直される。よって、

$$\langle x | e^{H/M^2} | x \rangle = e^{-2\sigma - 2A(\phi)} \frac{1}{4\pi} \left[M^2 e^{2\lambda} - \frac{1}{3} \partial^2 \lambda + \partial^2 \chi - (\partial \chi)^2 \right] \quad (\text{C.4.26})$$

が得られる。ここで、

$$\begin{aligned} \lambda &= \sigma - A(\phi) - 2B(\phi) + C(\phi) \\ \chi &= C(\phi) \end{aligned} \quad (\text{C.4.27})$$

のようにもとの変数を用いて書き直すと、

$$\begin{aligned} \langle x | e^{H/M^2} | x \rangle &= e^{-2\sigma - 2A(\phi)} \frac{1}{4\pi} \left[M^2 e^{2\sigma + 2(-A(\phi) - 2B(\phi) + C(\phi))} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \partial^2 \sigma + \frac{1}{3} \partial^2 (A(\phi) + 2B(\phi) + 2C(\phi)) - (\partial C(\phi))^2 \right] \\ &= e^{-2A(\phi)} \left\{ \frac{M^2}{4\pi} e^{h(\phi)} + \frac{1}{24\pi} [R - (\nabla f(\phi))^2 + \square j(\phi)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.4.28})$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} f(\phi) &\equiv 6C(\phi) \\ j(\phi) &\equiv 2(A(\phi) + 2B(\phi) + 2C(\phi)) \\ h(\phi) &\equiv 2(-A(\phi) - 2B(\phi) + C(\phi)) \end{aligned} \quad (\text{C.4.29})$$

とおいた。よって、求めたかったヤコビアンは、

$$\ln J = - \int d^2x \sqrt{g} \alpha(x) \left\{ \frac{M^2}{4\pi} e^{h(\phi)} + \frac{1}{24\pi} [R - (\nabla f(\phi))^2 + \square j(\phi)] \right\} \quad (\text{C.4.30})$$

となる。dilaton なしの場合と同様な手順によって、エネルギー運動量テンソルのトレースが決まって、

$$T_\mu^\mu = \frac{M^2}{4\pi} e^{h(\phi)} + \frac{1}{24\pi} [R - (\nabla f(\phi))^2 + \square j(\phi)] \quad (\text{C.4.31})$$

が得られる。この式の第1項目の発散項と $\square j(\phi)$ の項は、元の作用 (C.1.2) に local counter term を入れて

$$S'[g, X, \phi] = S[g, X, \phi] - \int d^2x \sqrt{g} \frac{M^2}{8\pi} e^{h(\phi)} - \frac{1}{48\pi} \int d^2x \sqrt{g} j(\phi) R \quad (\text{C.4.32})$$

とすれば打ち消せる。実際、

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{M^2}{8\pi} e^{h(\phi)} g_{\mu\nu} - \frac{1}{24\pi} (-\nabla_\mu \nabla_\nu j(\phi) + g_{\mu\nu} \square j(\phi)) \quad (\text{C.4.33})$$

となり、トレースは、

$$T'^\mu_\mu = T^\mu_\mu - \frac{M^2}{4\pi} e^{h(\phi)} - \frac{1}{24\pi} \square j(\phi) = \frac{1}{24\pi} [R - (\nabla f(\phi))^2] \quad (\text{C.4.34})$$

となる。よって、作用 (C.1.2) のトレースアノマリーは、 $f(\phi)$ を任意関数として

$$T^\mu_\mu = \frac{1}{24\pi} [R - (\nabla f(\phi))^2] \quad (\text{C.4.35})$$

で与えられることが分かった。

付録D (2+1)次元ブラックストリングとその蒸発過程

第6章で高次元ブラックストリングの蒸発を議論した。そこでは、Hawking 輻射の反作用は摂動的に取り入れて、その摂動論からブラックストリングの蒸発の最終状態を予測した(図6.5)。この描像を実際に確かめるためには、non-linear の方程式を解く必要がある。実際に non-linear の方程式を解くことは難しいが、それに向けてモデルを広げておくことは重要である。この章では、我々が新たに発見した(2+1)次元ブラックストリング解とその蒸発について調べ、定性的性質は高次元ブラックストリングと変わらないことを示す[52]。これにより、この新しい(2+1)次元ブラックストリング解を高次元ブラックストリング蒸発研究のモデルとして用いることができることが分かる。

D.1 (2+1)次元ブラックストリング解

次の(2+1)次元 dilaton gravity からスタートする。

$$S[A, g] = \int d^3x \sqrt{-g} [AR + V(A)]. \quad (\text{D.1.1})$$

ここで、 A はスカラー場である。この作用から導かれる運動方程式は

$$R + \frac{dV}{dA} = 0, \quad (\text{D.1.2})$$

$$AG_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}V(A) - \nabla_\mu \nabla_\nu A + g_{\mu\nu} \square A = 0. \quad (\text{D.1.3})$$

である。この解を求めよう。計量の形を

$$ds^2 = -\alpha(r)dt^2 + \beta(r)dr^2 + dy^2 \quad (\text{D.1.4})$$

のように仮定し、さらに $A = A(r)$ として解を探す。式(D.1.3)の対角成分は、

$$\frac{1}{2}\alpha(r)V(A) - \nabla_t \nabla_t A - \alpha(r)\square A = 0, \quad (\text{D.1.5})$$

$$-\frac{1}{2}\beta(r)V(A) - \nabla_r \nabla_r A + \beta(r)\square A = 0, \quad (\text{D.1.6})$$

$$-\frac{1}{2}AR - \frac{1}{2}V(A) + \square A = 0. \quad (\text{D.1.7})$$

となる。式(D.1.5)と式(D.1.6)より

$$\square A - V(A) = 0. \quad (\text{D.1.8})$$

となる。一方、式 (D.1.2) と式 (D.1.7) より

$$\square A + \frac{1}{2}A \frac{dV}{dA} - \frac{1}{2}V(A) = 0. \quad (\text{D.1.9})$$

が得られる。よって、式 (D.1.8) と式 (D.1.9) より、

$$V(A) + A \frac{dV}{dA} = 0 \quad (\text{D.1.10})$$

となる。ゆえに、式 (D.1.4) の形の計量を仮定すると、dilaton potential $V(A)$ は

$$V(A) = \frac{\lambda^2}{A}, \quad (\text{D.1.11})$$

の形でなければならないことが分かる。ここで λ は質量の次元を持つ定数である。ここで、 $\beta(r) = 1/\alpha(r)$ とゲージを選んで解を探そう。式 (D.1.5) と式 (D.1.8) より

$$\nabla_t \nabla_t A + \frac{1}{2}\alpha V(A) = 0. \quad (\text{D.1.12})$$

となり、この方程式は

$$\alpha' A' = V(A), \quad (\text{D.1.13})$$

と書ける。ここで、 $' \equiv \partial_r$ である。また、式 (D.1.6) と式 (D.1.8) より、

$$\nabla_r \nabla_r A + \frac{1}{2}\alpha^{-1}V(A) = 0. \quad (\text{D.1.14})$$

となり、この方程式は、

$$A'' + \frac{\alpha'}{2\alpha}A' - \frac{V(A)}{2\alpha} = 0. \quad (\text{D.1.15})$$

と書ける。式 (D.1.13) と式 (D.1.15) より、(2+1) 次元のブラックストリング解を求めることができ、

$$ds^2 = -\ln\left(\frac{r}{r_H}\right) dt^2 + \ln\left(\frac{r}{r_H}\right)^{-1} dr^2 + dy^2, \quad (\text{D.1.16})$$

$$A(r) = \lambda r \quad (\text{D.1.17})$$

となることが分かる。

この解の性質を調べていこう。この時空のリッチスカラーは、

$$R = \frac{1}{r^2}. \quad (\text{D.1.18})$$

で与えられる。よって、 $r = 0$ は curvature singularity であり、 $r = r_H, \infty$ は座標特異点である。特に、 $r = r_H$ はホライズンである。また、リッチスカラーの表式からこの時空は漸近的に平坦であることが読み取れる。

座標特異点を消せる座標系を考える。ホライズン近傍では、この時空は Rindler 時空になる。よって、ホライズン上での座標特異点は Kruskal 的座標

$$\begin{cases} U = -\exp\left(-\frac{u}{2r_H}\right) \\ V = \exp\left(\frac{v}{2r_H}\right), \end{cases} \quad (\text{D.1.19})$$

を取れば消せることが分かる。ここで、

$$\begin{cases} u = t - r - r_H \ln\left(\frac{r-r_H}{r_H}\right) \\ v = t + r + r_H \ln\left(\frac{r-r_H}{r_H}\right). \end{cases} \quad (\text{D.1.20})$$

と定義した。

無限遠の座標特異点を消すためには、まず null 座標に移ろう。

$$ds^2 = -f(r)d\tilde{u}d\tilde{v}. \quad (\text{D.1.21})$$

ここで、

$$f(r) = \int \frac{dr}{\ln(r/r_H)}, \quad (\text{D.1.22})$$

$$\begin{cases} \tilde{u} = t - f(r) \\ \tilde{v} = t + f(r). \end{cases} \quad (\text{D.1.23})$$

である。次に新しい \tilde{V} 座標

$$\tilde{V} = f^{-1}(\tilde{v}), \quad (\text{D.1.24})$$

に移る。 f^{-1} は f の逆関数である。この座標系で計量は

$$ds^2 = -\frac{\ln(r/r_H)}{\ln(\tilde{V}/r_H)} d\tilde{v}d\tilde{V}. \quad (\text{D.1.25})$$

と書ける。この計量は無限遠で正則である。なぜなら、

$$\tilde{V} = f^{-1}(t + f(r)) \rightarrow r \quad (t = \text{const}, r \rightarrow \infty), \quad (\text{D.1.26})$$

となるからである。

D.2 (2+1) 次元ブラックストリングの不安定性

次に、このブラックストリングの不安定性を解析していく。背景場を、

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A + \delta A \\ g_{\mu\nu} &\rightarrow g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{D.2.1})$$

のように perturb させる。このとき、式 (D.1.2) と式 (D.1.3) の摂動方程式は、

$$\nabla^\rho \nabla^\sigma h_{\rho\sigma} - \square h - R^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} + \frac{d^2 V}{dA^2} \delta A = 0, \quad (\text{D.2.2})$$

$$\begin{aligned} A\delta G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}V(A) + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho A \\ + h_{\mu\nu}\square A - g_{\mu\nu}h_{\rho\sigma}\nabla^\rho\nabla^\sigma A - g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\delta\Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \partial_\alpha A \\ + G_{\mu\nu}\delta A - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{dV}{dA}\delta A - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta A + g_{\mu\nu}\square\delta A = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.2.3})$$

となる。ここで、 $h \equiv h_{\mu}^{\mu}$ であり、

$$\begin{aligned} \delta G_{\mu\nu} = & \frac{1}{2} [\nabla^{\rho} \nabla_{\mu} h_{\nu\rho} + \nabla^{\rho} \nabla_{\nu} h_{\mu\rho} \\ & - \square h_{\mu\nu} - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} h - R h_{\mu\nu} \\ & - g_{\mu\nu} (\nabla^{\rho} \nabla^{\sigma} h_{\rho\sigma} - \square h - R^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma})], \end{aligned} \quad (\text{D.2.4})$$

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\nabla_{\mu} h_{\nu\sigma} + \nabla_{\nu} h_{\sigma\mu} - \nabla_{\sigma} h_{\mu\nu}). \quad (\text{D.2.5})$$

である。摂動量の (t, y) 依存性を

$$\begin{aligned} \delta A(t, r, y) & \rightarrow \delta A(r) e^{\Omega t + iky} \\ h_{\mu\nu}(t, r, y) & \rightarrow h_{\mu\nu}(r) e^{\Omega t + iky} \end{aligned} \quad (\text{D.2.6})$$

のように仮定する。 $\propto e^{i\Omega t}$ のように仮定せず、 $\propto e^{\Omega t}$ のように仮定したのは、我々の目的が不安定性を見つけることだからである。もし $\Omega > 0$ のような解が見つければ不安定性が見つかったことになる。

もとの作用には一般座標変換不変性があるので、不安定性の解析のためにはこのゲージモードを取り除かなければならない。 δA と $h_{\mu\nu}$ のゲージ変換は、 $\bar{\delta} A - \delta A = -\xi^{\mu} \partial_{\mu} A$, $\bar{h}_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} = -\nabla_{\mu} \xi_{\nu} - \nabla_{\nu} \xi_{\mu}$ である。バー付の変数はゲージ変換後の変数を表す。背景場を代入すると、ゲージ変換は、

$$\begin{aligned} \bar{\delta} A - \delta A & = -\lambda \alpha \xi_r, \\ \bar{h}_{tt} - h_{tt} & = \frac{-2\Omega r \xi_t + \alpha \xi_r}{r}, \\ \bar{h}_{tr} - h_{tr} & = \frac{-r \alpha \xi'_t + \xi_t - \Omega r \alpha \xi_r}{r \alpha}, \\ \bar{h}_{ty} - h_{ty} & = -ik \xi_t - \Omega \xi_y, \\ \bar{h}_{rr} - h_{rr} & = -\frac{2r \alpha \xi'_r + \xi_r}{r \alpha}, \\ \bar{h}_{ry} - h_{ry} & = -ik \xi_r - \xi'_y, \\ \bar{h}_{yy} - h_{yy} & = -2ik \xi_y. \end{aligned} \quad (\text{D.2.7})$$

と書ける。ここで、 $' \equiv \partial_r$, $\alpha(r) \equiv \ln(r/r_H)$ である。ゲージパラメータ ξ_{μ} も式 (D.2.6) の形を仮定した。我々のゲージチョイスは、

$$\bar{\delta} A = 0, \bar{h}_{ty} = 0, \bar{h}_{yy} = 0. \quad (\text{D.2.8})$$

である。式 (D.2.7) よりこのゲージ条件は ξ_{μ} を代数的に決定する。よって、このゲージ条件はゲージ自由度を完全に固定する。このゲージで式 (D.2.2) と式 (D.2.3) を書き下すと、式 (D.2.2) より、

$$\begin{aligned} & 2r^2 \alpha^2 h''_{tt} - r \alpha h'_{tt} + (2\alpha + 1 - 2k^2 r^2 \alpha) h_{tt} \\ & - 4\Omega r^2 \alpha^2 h'_{tr} - 2\Omega r \alpha h_{tr} \\ & + r \alpha^3 h'_{rr} + \alpha^2 (1 - 2\alpha + 2\Omega^2 r^2 + 2k^2 r^2 \alpha) h_{rr} \\ & + 4ikr^2 \alpha^3 h'_{ry} + 4ikr \alpha^2 h_{ry} = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.2.9})$$

式 (D.2.3) より

tt 成分

$$\begin{aligned} r\alpha^2 h'_{rr} + \alpha(k^2 r^2 + 2)h_{rr} \\ + 2ikr^2 \alpha h'_{ry} + ikr(2\alpha + 1)h_{ry} = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.2.10})$$

tr 成分

$$k^2 r h_{tr} + \Omega \alpha h_{rr} + i\Omega k r h_{ry} = 0, \quad (\text{D.2.11})$$

ty 成分

$$\begin{aligned} ikr\alpha h'_{tr} + ik(\alpha + 1)h_{tr} \\ - i\Omega k r \alpha h_{rr} + \Omega r \alpha h'_{ry} + \Omega \alpha h_{ry} = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.2.12})$$

rr 成分

$$\begin{aligned} -r\alpha h'_{tt} + (k^2 r^2 + 1)h_{tt} + 2\Omega r \alpha h_{tr} \\ - \alpha^2 h_{rr} - ikr\alpha(2\alpha + 1)h_{ry} = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.2.13})$$

ry 成分

$$\begin{aligned} -2ikr\alpha h'_{tt} + ikh_{tt} + 2i\Omega k r \alpha h_{tr} \\ - ik\alpha^2(2\alpha + 1)h_{rr} - 2\Omega^2 r \alpha h_{ry} = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.2.14})$$

yy 成分

$$\begin{aligned} 2r^2 \alpha^2 h''_{tt} + r\alpha(2\alpha - 1)h'_{tt} + h_{tt} \\ - 4\Omega r^2 \alpha^2 h'_{tr} - 2\Omega r \alpha(2\alpha + 1)h_{tr} \\ + r\alpha^3(2\alpha + 1)h'_{rr} + \alpha^2(1 + 4\alpha + 2\Omega^2 r^2)h_{rr} = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.2.15})$$

が得られる。式 (D.2.11), (D.2.12), (D.2.13), (D.2.14) を見ると、 h_{tr} , h_{rr} , h_{ry} は消去できることが分かる。その結果、 h_{tt} に関するマスター方程式が得られて、

$$\begin{aligned} \bar{r}^2 \alpha^2 (2\bar{k}^2 \alpha + 2\bar{\Omega}^2 + \bar{k}^2) \frac{d^2}{d\bar{r}^2} h_{tt} \\ + \bar{r} \alpha (2\bar{k}^2 \alpha^2 + 2\bar{\Omega}^2 \alpha - \bar{k}^2 \alpha + 2\bar{\Omega}^2 + \bar{k}^2) \frac{d}{d\bar{r}} h_{tt} \\ - (2\bar{k}^4 \bar{r}^2 \alpha^2 + 4\bar{\Omega}^2 \bar{k}^2 \bar{r}^2 \alpha + \bar{k}^4 \bar{r}^2 \alpha \\ - 2\bar{k}^2 \alpha + 2\bar{\Omega}^4 \bar{r}^2 + \bar{\Omega}^2 \bar{k}^2 \bar{r}^2) h_{tt} = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.2.16})$$

となる。ここで、 $\bar{r} = r/r_H$, $\bar{k} = kr_H$, $\bar{\Omega} = \Omega r_H$ である。式 (D.2.16) で h_{tt} が決まれば、他の変数 h_{tr} , h_{rr} , h_{ry} は h_{tt} は自動的に決まる。

マスター方程式 (D.2.16) を数値的に解いて不安定性を示すことにする。そのために、解の漸近形をもとめておこう。まず $\bar{r} \sim 1$ のとき、式 (D.2.16) は、

$$\frac{d^2}{d\bar{r}^2} h_{tt} + \frac{1}{\bar{r} - 1} \frac{d}{d\bar{r}} h_{tt} - \frac{\bar{\Omega}^2}{(\bar{r} - 1)^2} = 0 \quad (\text{D.2.17})$$

となる。この解は、

$$h_{tt} \sim A_H(\bar{r}-1)^{\bar{\Omega}} + B_H(\bar{r}-1)^{-\bar{\Omega}} \quad (\bar{r} \sim 1) \quad (\text{D.2.18})$$

である。ホライズンでは h_{tt} が正則、つまり $B_H = 0$ になるような解を探す。無限遠における漸近系も求めたい。しかし、無限遠の漸近形を扱うときは注意が必要である。我々は、マスター方程式を数値的に解こうとしている。そのため、 $\bar{r} = \infty$ は $\bar{r} = (\text{十分大きい値})$ で置き換えられる。数値計算上の理由から、この(十分大きい値)は、1000程度にしておきたい。しかし、この程度の大きさでは $\alpha = \ln \bar{r} \sim 1$ である。よって、 α の低次を無視すると正しい結果が得られなくなってしまう。 α の低次を無視せずに無限遠での解の漸近形を求めるために WKB 近似を使う。見やすくするために、マスター方程式 (D.2.16) を

$$\frac{d^2}{d\bar{r}^2} h_{tt} + f(\bar{r}) \frac{d}{d\bar{r}} h_{tt} + g(\bar{r}) h_{tt} = 0 \quad (\text{D.2.19})$$

と書く。ここで、 $H = h_{tt} \exp(\int (f/2) d\bar{r})$ を定義すると、式 (D.2.19) は、

$$\frac{d^2}{d\bar{r}^2} H - \left(\frac{f_{,\bar{r}}}{2} + \frac{f^2}{4} - g \right) H = 0. \quad (\text{D.2.20})$$

と書ける。もし WKB 近似成立条件

$$\varepsilon \equiv \left\{ \left(\frac{f_{,\bar{r}}}{2} + \frac{f^2}{4} - g \right)_{,\bar{r}} \right\}^2 / \left(\frac{f_{,\bar{r}}}{2} + \frac{f^2}{4} - g \right)^3 \ll 1, \quad (\text{D.2.21})$$

を満たしていれば、 H は、

$$H \propto \exp \left(\pm \int d\bar{r} \sqrt{\frac{f_{,\bar{r}}}{2} + \frac{f^2}{4} - g} \right). \quad (\text{D.2.22})$$

で与えられる。WKB 条件 (D.2.21) は、あとで数値的にチェックする。 h_{tt} が無限遠でゼロに落ちるように、“-” 符号を選ぶことにする。このとき h_{tt} は

$$h_{tt} \propto \exp \left(- \int d\bar{r} \left(\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{f_{,\bar{r}}}{2} + \frac{f^2}{4} - g} \right) \right) \quad (\text{D.2.23})$$

となる。ゆえに、 $dh_{tt}/d\bar{r}$ は h_{tt} から決定できて、

$$\frac{dh_{tt}/d\bar{r}}{h_{tt}} = -\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{f_{,\bar{r}}}{2} + \frac{f^2}{4} - g} \quad (\text{D.2.24})$$

となる。

これで、数値計算を始めることができる。Runge-Kutta algorithm を用いて $\bar{r}_1 = 1000.0$ から $\bar{r}_2 = 1 + 0.0001$ まで積分した。初期条件は $h_{tt}(\bar{r}_1) = 1$ とおいて、 $dh_{tt}/d\bar{r}(\bar{r}_1)$ は式 (D.2.24) から決めた。この条件下で、 \bar{k} を止めて $\bar{\Omega}$ をふらしながらマスター方程式 (D.2.16) を解いていく。ホライズン近傍 $\bar{r} = \bar{r}_2$ では B_H の値をチェックし、 B_H の符号が変わるときの $\bar{\Omega}$ の値を探した。この操作を様々な \bar{k} で行うことによって、分散関係 (図 D.1) が得られた。これによって不安定性が示されたことになる。さらに $\bar{\Omega} = 0$ になるとき、つまり不安定と安定の境目で $\bar{k} = \bar{k}_{\text{crit}} = 0.8454$ となることが得られた。また、図 D.2 を見ると $\varepsilon \ll 1$ を満たしていることが分かる。これにより $\bar{r} = \bar{r}_1$ で WKB 近似を用いた正当性が示された。

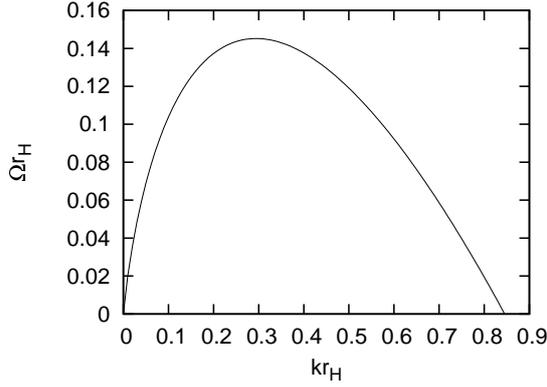


図 D.1: 分散関係

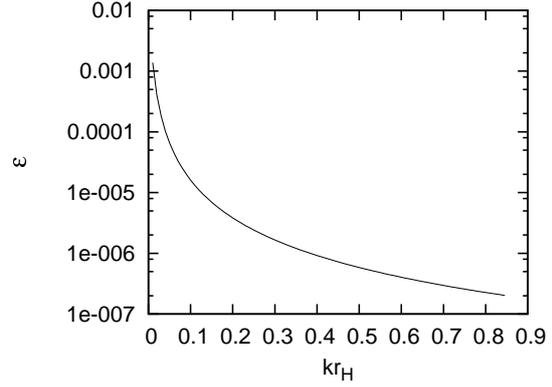


図 D.2: WKB パラメータ

D.3 (2+1) 次元ブラックストリングの蒸発過程

前節で、ホライズン半径がコンパクト化のスケールよりも小さい (2+1) 次元ブラックストリングは不安定であることが示された。逆に言えば、ホライズン半径がコンパクト化のスケールよりも大きい場合、このブラックストリングは安定である。この古典的安定性は、物質場の量子効果、つまり Hawking 輻射によってどのように変わるであろうか。作用 (D.1.1) に、物質場を加えて

$$S[A, g] = \int d^3x \sqrt{-g} [AR + V(A)] + \int d^3x \sqrt{-g} A \left[-\frac{1}{2} (\nabla f)^2 \right] \quad (\text{D.3.1})$$

とする。物質場は、式 (6.2.6) の物質場の dimensional reduction に習って、Lagrangian に dilaton A をかけたものを用いた。内部空間のダイナミクスを考慮に入れるために、計量を

$$ds^2 = g_{ab}(x^a) dx^a dx^b + e^{-2\chi(x^a)} dy^2 \quad (\text{D.3.2})$$

とおく。 χ は、radion と呼ばれ内部空間の大きさを記述する場である。ここでは、 $r_H \gg L$ を仮定して、すべての場は y に依らないとする。このとき、作用 (D.3.1) において y 積分が実行できてしまって、

$$S[A, g, \chi, f] = M_3 L \int d^2x \sqrt{-g} e^{-\chi} [AR - 2\nabla A \cdot \nabla \chi + \frac{\lambda^2}{A}] + \int d^2x \sqrt{-g} e^{-\chi} A \left[-\frac{1}{2} (\nabla f)^2 \right], \quad (\text{D.3.3})$$

が得られる。上式の g , R はそれぞれ 2 次元計量、2 次元リッチスカラーである。2 次元の dilaton gravity の観点から、ブラックストリングの蒸発を調べることができることが分かる。Hawking 輻射の反作用を考えたいので物質場は量子的に扱おう。つまり、物質場の古典作用の代わりに、effective action

$$W[A, g, \chi] = -i \ln \left(\int \mathcal{D}f \exp(i \int d^2x \sqrt{-g} e^{-\chi} A \left[-\frac{1}{2} (\nabla f)^2 \right]) \right) \quad (\text{D.3.4})$$

と、半古典的エネルギー運動量テンソル

$$\langle T_{ab} \rangle = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W}{\delta g^{ab}}. \quad (\text{D.3.5})$$

を用いる。反作用は摂動論的に取り入れることにする。つまり、 T_{ab} を小さいとして、背景時空 (D.1.17) を perturb させる。6.4 節と同様な計算を行うことにより、マスター方程式として、

$$-\square\delta\chi - \frac{1}{A}\nabla A \cdot \nabla\delta\chi = \frac{1}{4M_3L} \frac{1}{A} \langle T_a^a \rangle . \quad (\text{D.3.6})$$

が得られる。ここで $\delta\chi$ は radion perturbation である。付録 C で述べているように、物質場には Weyl 対称性があるので、古典的には右辺のエネルギー運動量テンソルのトレースはゼロである。しかし、量子化によりこの対称性は破れて、ゼロでないトレースパート

$$\langle T_a^a \rangle = \frac{1}{24\pi} R = \frac{1}{24\pi r^2} . \quad (\text{D.3.7})$$

が得られる。マスター方程式 (D.3.6) を解いてみよう。初期条件は、 $\delta\chi(t=0, r) = \delta\chi_{,t}(t=0, r) = 0$ とする。このとき、動き始めの radion のダイナミクスは、

$$\delta\chi = \frac{1}{8M_3L} \frac{\alpha(r)}{A} \langle T_a^a \rangle t^2 = \frac{1}{192\pi\lambda M_3L} \frac{\ln(r/r_H)}{r^3} t^2 . \quad (\text{D.3.8})$$

で与えられる。この振舞いを絵にすると、高次元ブラックストリングと同様な振舞いで図 6.4 のようになる。

これにより、我々が発見した新しい (2+1) 次元ブラックストリングの蒸発過程は、高次元ブラックストリングと定性的には代わらないことが予想される。よって、このブラックストリングは non-linear の内部空間のダイナミクスを調べる際の新しいモデルとして用いることができる。

参考文献

- [1] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D7** (1973) 2333–2346.
- [2] S. Carlip, gr-qc/0601041.
- [3] P. K. Townsend, gr-qc/9707012.
- [4] R. M. Wald, Phys. Rev. **D48** (1993) 3427–3431, [gr-qc/9307038].
- [5] V. Iyer and R. M. Wald, Phys. Rev. **D50** (1994) 846–864, [gr-qc/9403028].
- [6] D. Louis-Martinez and G. Kunstatter, Phys. Rev. **D49** (1994) 5227–5230.
- [7] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43** (1975) 199–220.
- [8] S. M. Christensen and S. A. Fulling, Phys. Rev. **D15** (1977) 2088–2104.
- [9] E. Mottola and R. Vaulin, Phys. Rev. **D74** (2006) 064004, [gr-qc/0604051].
- [10] S. P. Robinson and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 011303, [gr-qc/0502074].
- [11] S. Iso, H. Umetsu, and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 151302, [hep-th/0602146].
- [12] K. Murata and J. Soda, Phys. Rev. **D74** (2006) 044018, [hep-th/0606069].
- [13] W. G. Unruh, Phys. Rev. **D14** (1976) 870.
- [14] T. Kimura, Prog. Theor. Phys. **44** (1970) 1353–1370.
- [15] L. Alvarez-Gaume and E. Witten, Nucl. Phys. **B234** (1984) 269.
- [16] R. A. Bertlmann and E. Kohlprath, Annals Phys. **288** (2001) 137–163, [hep-th/0011067].
- [17] S. N. Solodukhin, Phys. Rev. **D74** (2006) 024015, [hep-th/0509148].
- [18] J. M. Bardeen and G. T. Horowitz, Phys. Rev. **D60** (1999) 104030, [hep-th/9905099].
- [19] R. C. Myers and M. J. Perry, Ann. Phys. **172** (1986) 304.
- [20] V. P. Frolov and D. Kubiznak, gr-qc/0605058.
- [21] S. Iso, H. Umetsu, and F. Wilczek, Phys. Rev. **D74** (2006) 044017, [hep-th/0606018].

- [22] Z. Xu and B. Chen, hep-th/0612261.
- [23] S. Iso, T. Morita, and H. Umetsu, hep-th/0612286.
- [24] Q.-Q. Jiang and S.-Q. Wu, hep-th/0701002.
- [25] E. C. Vagenas and S. Das, JHEP **10** (2006) 025, [hep-th/0606077].
- [26] M. R. Setare, hep-th/0608080.
- [27] Q.-Q. Jiang, S.-Q. Wu, and X. Cai, hep-th/0701048.
- [28] Q.-Q. Jiang, S.-Q. Wu, and X. Cai, hep-th/0701235.
- [29] A. Dabholkar, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 241301, [hep-th/0409148].
- [30] P. Kraus and F. Larsen, JHEP **09** (2005) 034, [hep-th/0506176].
- [31] J. Callan, Curtis G., S. B. Giddings, J. A. Harvey, and A. Strominger, Phys. Rev. **D45** (1992) 1005–1009, [hep-th/9111056].
- [32] J. G. Russo, L. Susskind, and L. Thorlacius, Phys. Rev. **D46** (1992) 3444–3449, [hep-th/9206070].
- [33] G. Michaud and R. C. Myers, gr-qc/9508063.
- [34] K. Hirata, Y. Fujiwara, and J. Soda, Phys. Lett. **B378** (1996) 68–77, [gr-qc/9602048].
- [35] A. P. Balachandran, L. Chandar, and A. Momen, Nucl. Phys. **B461** (1996) 581–596, [gr-qc/9412019].
- [36] A. P. Balachandran, L. Chandar, and A. Momen, Int. J. Mod. Phys. **A12** (1997) 625–642, [hep-th/9512047].
- [37] S. Carlip, Phys. Lett. **B508** (2001) 168–172, [gr-qc/0103100].
- [38] S. N. Solodukhin, Phys. Lett. **B454** (1999) 213–222, [hep-th/9812056].
- [39] R. Gregory and R. Laflamme, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2837–2840, [hep-th/9301052].
- [40] M.-I. Park, Class. Quant. Grav. **22** (2005) 2607–2614, [hep-th/0405045].
- [41] H. Kudoh, Phys. Rev. **D73** (2006) 104034, [hep-th/0602001].
- [42] J. L. Hovdebo and R. C. Myers, Phys. Rev. **D73** (2006) 084013, [hep-th/0601079].
- [43] H. W. Lee, N. J. Kim, Y. S. Myung, and J. Y. Kim, Phys. Rev. **D57** (1998) 7361–7368, [hep-th/9801152].

- [44] H. W. Lee, Y. S. Myung, and J. Y. Kim, Phys. Rev. **D52** (1995) 2214–2220.
- [45] J. H. Horne and G. T. Horowitz, Nucl. Phys. **B368** (1992) 444–462, [hep-th/9108001].
- [46] N. Kaloper, Phys. Lett. **B434** (1998) 285–293, [hep-th/9804062].
- [47] J. L. Cardy, Nucl. Phys. **B270** (1986) 186–204.
- [48] H. W. J. Bloete, J. L. Cardy, and M. P. Nightingale, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 742–745.
- [49] S. Carlip, Class. Quant. Grav. **15** (1998) 3609–3625, [hep-th/9806026].
- [50] 藤川和男, 「経路積分と対称性の量子的破れ」, 岩波書店, 2001.
- [51] P. D. Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer, 1997.
- [52] K. Murata, J. Soda, and S. Kanno, gr-qc/0701137.