

ホーキング輻射

慶應義塾大学 村田佳樹

ホーキング輻射の導出についてまとめたノートです。曲がった時空中のスカラー場の量子化について解説したのち、2次元 Vaidya 時空においてホーキング輻射のスペクトルを計算してあります。文献 [1, 2, 3, 4] を参考にしてまとめました。

1 曲がった時空中のスカラー場の量子化

一般の計量は、以下のような $d+1$ 形式で書くことが出来る。

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt). \quad (1)$$

t 一定面を Σ_t と書くことにする。 Σ_t の単位法線ベクトルは $n_a = -N(dt)_a$ であり、誘導計量は h_{ij} で与えられる。また、 $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$ も確認することが出来る。

実スカラー場の作用は、

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^d x \sqrt{-g} (-g^{ab} \partial_a \Phi \partial_b \Phi - m^2 \Phi^2), \quad (2)$$

であり、運動方程式は $(\square - m^2)\Phi = 0$ である。共役運動量は、

$$\Pi \equiv \frac{\delta S}{\delta \partial_t \Phi} = \sqrt{h} n^\mu \partial_\mu \Phi, \quad (3)$$

で与えられる。ここで、スカラー場の正準量子化を行おう。 Φ, Π を演算子とみなし、以下の正準量子化条件を課す:

$$[\Phi(t, x), \Pi(t, x')] = i\delta^{(d)}(x - x'), \quad [\Phi(t, x), \Phi(t, x')] = 0, \quad [\Pi(t, x), \Pi(t, x')] = 0. \quad (4)$$

通常の平坦な時空で行われるような、量子場を生成消滅演算子で展開したい。そのために α, β を Klein-Gordon 方程式の複素解として、以下の内積を定義しよう:

$$(\alpha, \beta) \equiv i \int_{\Sigma_t} d^d x \sqrt{h} n^a (\alpha^* \partial_a \beta - \beta \partial_a \alpha^*). \quad (5)$$

この内積は、時刻 t に寄らないことはすぐに確認できる。モード関数をこの内積で正規直交化しておく。つまり、

$$(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}, \quad (\psi_i, \psi_j^*) = 0, \quad (6)$$

をモード関数の組に要請する。このモード関数を用いて量子場 Φ を

$$\Phi = \sum_i (a_i \psi_i + a_i^\dagger \psi_i^*), \quad (7)$$

と展開する。このとき、正準量子化条件 (4) から、

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0. \quad (8)$$

を得ることが出来る。 a^\dagger, a_i を生成消滅演算子とみなし、真空を

$$a_i|0\rangle = 0 \quad (\text{for } \forall i). \quad (9)$$

で定義する。のちに見るように、この真空の定義は一意的ではなくモード関数の選び方に依存することに注意しよう。しかし、定常時空に対しては時間的 Killing ベクトル k が存在するので、それを用いて、

$$\mathcal{L}_k \psi_i = -i\omega_i \psi_i \quad (\omega_i > 0), \quad (10)$$

を要請する。このとき、正振動数モード ψ_i 、負振動数モード ψ_i^* が明確に区別されるので一意的な真空の定義が可能である。

2 ボゴリューボフ変換

モード関数の選び方は一意ではない。ここでは、モード関数を変えた場合に生成消滅演算子はどのように変換されるのかを見てみよう。あるモード関数の組 $\{\psi_i\}$ と $\{\psi'_i\}$ が以下のような関係にあるとする：

$$\psi'_i = \sum_j [A_{ij}\psi_j + B_{ij}\psi_j^*]. \quad (11)$$

この変換をボゴリューボフ変換とよび、 A_{ij} と B_{ij} をボゴリューボフ係数と呼ぶ。 $\{\psi'_i\}$ も正規直交化されているので、ボゴリューボフ係数には、

$$AA^\dagger - BB^\dagger = 1, \quad AB^T - BA^T = 0, \quad (12)$$

が要請される。また、逆ボゴリューボフ変換は、

$$\psi_i = \sum_j [(A^\dagger)_{ij}\psi'_j - (B^T)_{ij}\psi'^*_j]. \quad (13)$$

で与えられる。スカラー場のモード展開を考えると

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_i [a_i\psi_i + a_i^\dagger\psi_i^*] \\ &= \sum_{ij} [\{a_i(A^\dagger)_{ij} - a_i^\dagger(B^\dagger)_{ij}\}\psi'_j + \{-a_i(B^T)_{ij} + a_i^\dagger(A^T)_{ij}\}\psi'^*_j]. \end{aligned} \quad (14)$$

よって、 $\{\psi'_i\}$ での生成消滅演算子は

$$a'_i = \sum_j [(A^*)_{ij}a_j - (B^*)_{ij}a_j^\dagger], \quad a'^{\dagger}_i = \sum_j [-B_{ij}a_j + A_{ij}a_j^\dagger], \quad (15)$$

と書ける。

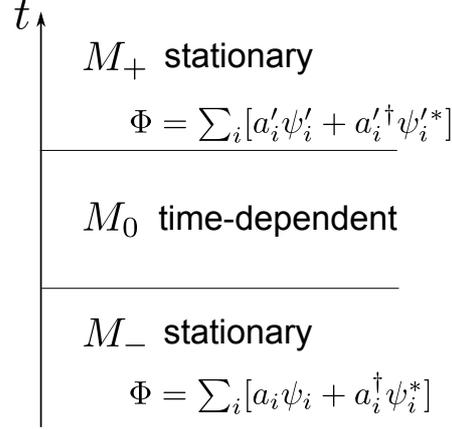


Figure 1: 非定常時空の例。領域 M_{\pm} は定常で、領域 M_0 では非定常である。領域 M_{\pm} では自然なモード関数 $\{\psi_i\}, \{\psi'_i\}$ が存在する。

3 非定常時空における粒子生成

Fig.1 のような時空を考えよう。領域 M_- は定常で、領域 M_0 では非定常になり、領域 M_+ では再び定常時空に戻る場合を考える。 M_- と M_+ でのモード関数をそれぞれ $\{\psi_i\}$ と $\{\psi'_i\}$ とおく。また、消滅演算子を a_i と a'_i とする。さらに、 ψ_i と ψ'_i は領域 M_+ と M_- で式 (10) を満たしているとする。 M_- で状態は真空にあるとしよう。つまり、 $a_i|0\rangle = 0$ である。この状態は、 M_+ ではどのように見えるであろうか？モード関数 ψ'_i に関する粒子数演算子を $N'_i = a_i^{\dagger} a'_i$ で定義すると、

$$\langle 0|N'_i|0\rangle = \sum_{jk} \langle 0|B_{ij}a_j(B^*)_{ik}a_k^{\dagger}|0\rangle = \sum_j B_{ij}(B^*)_{ij} = (BB^{\dagger})_{ii}. \quad (16)$$

ここで式 (15) を用いた。過去 (M_-) で真空状態であっても未来 (M_+) では有限の粒子数が生成されることが分かる。全粒子数は $\text{tr}(BB^{\dagger})$ で与えられるので、粒子が生成されないための必要十分条件は $B = 0$ である。つまり、過去と未来で正振動数モードと負振動数モードが混ざり合わない限り粒子生成は起こらないことを意味している。

非定常時空における粒子生成を計算する手順は以下の通りである。

1. 十分過去と十分未来のモード関数 $\{\psi_i\}, \{\psi'_i\}$ を構成する。
2. 未来でのモード関数 $\{\psi'_i\}$ を未来から過去方向に”時間発展”させる。
3. 十分過去まで時間発展できたら、そのモード関数を ψ_i で展開する。
4. その展開係数 B_{ij} を読み取ったら、式 (16) から未来での粒子生成数分かる。

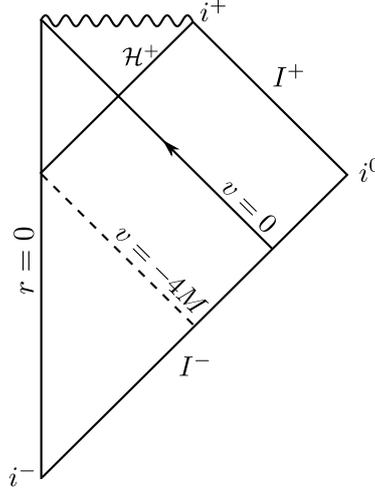


Figure 2: 2次元 Vaidya 時空の時空構造 ($r > 0$)。 $v > 0$ は 2次元 Schwarzschild 時空、 $v < 0$ は Minkowski 時空になっている。

4 ホーキング輻射

4.1 2次元 Vaidya 時空

シンプルな重力崩壊のモデルとして次のような二次元計量を考える:

$$ds^2 = -f(v, r)dv^2 + 2dvdr, \quad f(v, r) = 1 - \frac{2M\theta(v)}{r}. \quad (17)$$

この時空は、4次元の Vaidya 時空から 2次元球面部分を取り除いたものである。この時空は、 $v < 0$ ではミンコフスキー時空であり、 $v > 0$ ではシュバルツシルト時空になる。 $r > 0$ の領域でのペンローズ図は Fig.2 のようになる。

この時空中での無質量スカラー場の伝播を考えよう。 $r = 0$ ではスカラー場にディリクレ条件 ($\Phi|_{r=0} = 0$) を課すことにする。 2次元時空中の無質量スカラー場には、共形普遍性があるのでこの時空中のスカラー場の運動方程式は厳密に解けて、

$$\begin{aligned} \Phi &= F(v) + G(v - 2r_*(r)) \quad (v > 0), \\ \Phi &= F(v) + \tilde{G}(v - 2r) \quad (v < 0). \end{aligned} \quad (18)$$

となる。ここで、 r_* は亀座標で、

$$r_*(r) = \int \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr = r - 2M + 2M \ln \left(\frac{r - 2M}{2M}\right), \quad (19)$$

である。また、 F, G, \tilde{G} は任意関数である。 F は ingoing モード、 G と \tilde{G} は outgoing

モードに対応している。さらに、 $v = 0$ の接続条件と $r = 0$ の境界条件を課すと、

$$\begin{aligned}\tilde{G}(v - 2r) &= G\left(-2r_*\left(-\frac{v - 2r}{2}\right)\right), \\ F(v) &= -G\left(-2r_*\left(-\frac{v}{2}\right)\right) \quad (v < -4M).\end{aligned}\tag{20}$$

が得られる。

4.2 モード関数

過去光的無限遠 I^- と未来光的無限遠 I^+ において時空は静的である。そこで、 I^- での真空が I^+ ではどのような状態として観測されるかを考えよう。 I^- での自然な正振動数モードは

$$\psi_\omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega v}, \tag{21}$$

で与えられる。一方、 I^+ での正振動数モードは

$$\psi'_\omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u}, \tag{22}$$

である。ここで、 $u \equiv v - 2r_*$ である。実は、この I^+ のモード関数には問題がある。我々が計算したいのは、十分未来の生成粒子のスペクトルである。しかし、 ψ'_ω は、振動数空間でデルタ関数的に局在しているので、時間の情報を全く持っていない。よって、このモード関数のままでは、十分未来への極限をとることが出来ないのである。そこで、モード関数の振動数空間での局在を少し緩めて、時間方向にも少し局在化させることを考える必要がある。そのようなモード関数は例えば、

$$\psi'_{jn} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_{j\epsilon}^{(j+1)\epsilon} d\omega e^{2\pi i n \omega / \epsilon} \psi'_\omega, \tag{23}$$

で実現できることが分かる。ここで、 $j \geq 0$, n は整数である。このモード関数は、 u -空間で、 $u = 2\pi n / \epsilon$ の周りに幅 $2\pi / \epsilon$ で局在している。これが正規直交化条件 $(\psi'_{jn}, \psi'_{j'n'}) = \delta_{jj'} \delta_{nn'}$ を満たすことはすぐに確認できる。Fig.(3) にモード関数の実数部分を図示してある。

これから先、計算上は ψ'_ω を用いるが、常に積分演算子

$$I_{jn} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_{j\epsilon}^{(j+1)\epsilon} d\omega e^{2\pi i n \omega / \epsilon} \tag{24}$$

がモード関数に掛かっていることを頭の片隅に残しておく。最終的に $n \rightarrow \infty$ の極限を取るのので、それを用いた近似もしばしば使う。

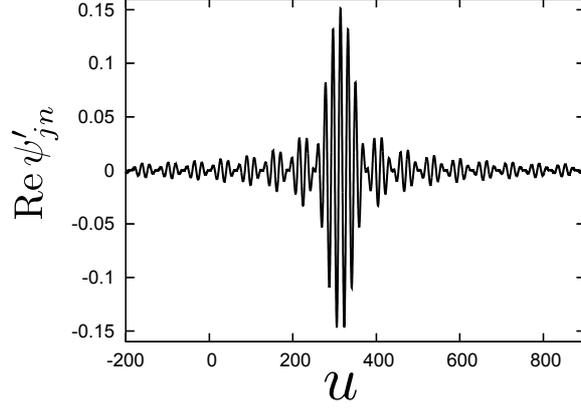


Figure 3: 波束型モード関数 ψ'_{jn} の実数部分。パラメータは $j = 3$, $n = 5$, $\epsilon = 0.1$ に設定した。

4.3 2次元 Vaidya 時空のホーキング輻射

3章での手順を思い出して、2次元 Vaidya 時空での粒子生成を評価しよう。 I^+ でのモード関数は式 (22) である。スカラー場の伝播は、式 (18) と (20) で厳密に解かれているので、 I^- での ψ'_ω の表式は、

$$\psi'_\omega|_{I^-} = \begin{cases} 0 & (v > -4M), \\ -\frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \exp \left[-2i\omega \left(\frac{v}{2} + 2M - 2M \ln \left(\frac{-v-4M}{4M} \right) \right) \right] & (v < -4M). \end{cases} \quad (25)$$

と与えられる。ここで、このモード関数には、本当は積分演算子 (24) が掛かっていることに留意しよう。積分演算子内の指数関数 $e^{2\pi i n \omega / \epsilon}$ に注目すると、 ω が $j\epsilon$ から $(j+1)\epsilon$ の間を変化する間にこの指数関数は n 回転する。今、 n は大きいことを仮定しているので、 $\psi'_{jn} = I_{jn}(\psi'_\omega)$ が有限に生き残るためには、式 (25) の指数関数も同じ程度逆回転しなければならない。つまり、 $v/2 + 2M - 2M \ln[(-v-4M)/(4M)] \sim n$ でなければならない。これを満たすためには $v \simeq -4M$ が満たされている必要がある。よって、式 (25) は、

$$\psi'_\omega|_{I^-} \simeq \begin{cases} 0 & (v > -1/\kappa), \\ -\frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \exp \left[\frac{i\omega}{\kappa} \ln(-\kappa v - 1) \right] & (v < -1/\kappa). \end{cases} \quad (26)$$

と近似しても、無限未来のスペクトルを調べるにあたっては問題ない。ここでは、表面重力 $\kappa = 1/(4M)$ を用いて式を書きなおしてある。

ボゴリューボフ係数 $B_{\omega\omega'}$ は、

$$B_{\omega\omega'} = -(\psi_{\omega'}^*, \psi'_\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} dv (\psi_{\omega'} \partial_v \psi'_\omega - \psi'_\omega \partial_v \psi_{\omega'}) = 2i \int_{-\infty}^{\infty} dv \psi'_\omega \partial_v \psi_{\omega'}. \quad (27)$$

から計算出来る。最後の等式では部分積分を行った。積分演算子 (24) が掛かっていることを再び思い出すと、境界項はゼロになることが分かる。具体的な表式 (21) と

(26) を用いると、

$$B_{\omega\omega'} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^{-1/\kappa} dv \exp \left[-i\omega'v + \frac{i\omega}{\kappa} \ln(-\kappa v - 1) \right]. \quad (28)$$

となる。ここで、 $x = -\kappa v - 1$ を導入すると、

$$\begin{aligned} B_{\omega\omega'} &= -\frac{1}{2\pi\kappa} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_0^{\infty} dx \exp \left[i\frac{\omega'}{\kappa}(x+1) + \frac{i\omega}{\kappa} \ln x \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi\kappa} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} e^{i\omega'/\kappa} \int_0^{\infty} dx x^{i\omega'/\kappa} e^{i\omega x/\kappa}. \end{aligned} \quad (29)$$

と書き換えられる。さらに、ガンマ関数の公式

$$\int_0^{\infty} x^a e^{-bx} = b^{-1-a} \Gamma(1+a), \quad (30)$$

を用いると、

$$B_{\omega\omega'} = -\frac{1}{2\pi\kappa} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} e^{i\omega'/\kappa} \left(\frac{-i\omega'}{\kappa} \right)^{-1-i\omega/\kappa} \Gamma \left(1 + \frac{i\omega}{\kappa} \right), \quad (31)$$

を得る。次に $\int_0^{\infty} d\omega' B_{\omega_1\omega'} B_{\omega_2\omega'}^*$ を計算しよう。式(31)を代入して少し整理すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} d\omega' B_{\omega_1\omega'} B_{\omega_2\omega'}^* &= \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{\omega_1\omega_2}} (-i)^{-i\omega_1/\kappa} i^{i\omega_2/\kappa} \\ &\quad \times \Gamma \left(1 + \frac{i\omega_1}{\kappa} \right) \Gamma \left(1 - \frac{i\omega_2}{\kappa} \right) \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\kappa} \left(\frac{\omega'}{\kappa} \right)^{-1-i(\omega_1-\omega_2)/\kappa}. \end{aligned} \quad (32)$$

となる。最後の積分項は、 $\omega'/\kappa = e^y$ と置くと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i(\omega_1-\omega_2)y/\kappa} = 2\pi\kappa \delta(\omega_1 - \omega_2) \quad (33)$$

のようにデルタ関数で書ける。よって、

$$\int_0^{\infty} d\omega' B_{\omega_1\omega'} B_{\omega_2\omega'}^* = \frac{\kappa}{2\pi\omega_1} e^{-\pi\omega_1/\kappa} \left| \Gamma \left(1 + \frac{i\omega_1}{\kappa} \right) \right|^2 \delta(\omega_1 - \omega_2), \quad (34)$$

となる。ここで、式(32)の一行目において、 $i = e^{i\pi/2}$ 、 $-i = e^{-i\pi/2}$ と置き変えた。さらに公式、

$$\Gamma(1+ix)\Gamma(1-ix) = \frac{2\pi x e^{\pi x}}{e^{2\pi x} - 1}, \quad (35)$$

を用いると、

$$\int_0^{\infty} d\omega' B_{\omega_1\omega'} B_{\omega_2\omega'}^* = \frac{1}{e^{2\pi\omega_1/\kappa} - 1} \delta(\omega_1 - \omega_2) \quad (36)$$

を得る。波束型のモード関数 (23) を使った場合のボゴリューボフ係数は $B_{jn,\omega'} = I_{jn}(B_{\omega\omega'})$ で計算できる。よって、式 (16) を用いると、生成粒子スペクトル

$$\langle 0|N_{jn}|0\rangle = \int_0^\infty d\omega' B_{jn,\omega'} B_{jn,\omega'}^* = \frac{1}{e^{2\pi\omega_j/\kappa} - 1} \quad (37)$$

が得られる。重力崩壊で生成される粒子のスペクトルはプランクスペクトルであり、その温度は、

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (38)$$

で与えられることが分かった。

References

- [1] S. W. Hawking, “Particle Creation by Black Holes,” *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975) [Erratum-ibid. **46**, 206 (1976)].
- [2] H. S. Reall, “Part 3 Black Holes”, レクチャーノート。H. S. Reall のウェブページから手に入る。
- [3] A. Fabbri, J. Navarro-Salas, “Modeling Black Hole Evaporation”, Imperial college press
- [4] P. K. Townsend, “Black holes: Lecture notes,” gr-qc/9707012.